现代数学基础丛书

同调论

——代数拓扑学之一

● 沈信耀　著



科学出版社

(O-1275.0101)
责任编辑：刘嘉善
封面设计：张　放

现代数学基础丛书

拓扑群引论
公理集合论导引
丢番图逼近引论
Banach代数
紧黎曼曲面引论
广义哈密顿系统理论及其应用
解析数论基础
数理统计引论
多元统计分析引论
概率论基础
微分动力系统原理
二阶椭圆型方程与椭圆型方程组
分析概率论
非线性发展方程
黎曼曲面
傅里叶积分算子理论及其应用
微分方程定性理论
概率论基础和随机过程
复解析动力系统
反应扩散方法引论
离散鞅及其应用
复合算子理论
模型论基础
环与代数
仿微分算子引论
实分析导论
对称性分岔理论基础
线性微分方程的非线性扰动
随机点过程及其应用
复变函数逼近论
线性整数规化的数学基础
组合矩阵论
算子代数
Banach空间中的非线性逼近理论
Gel'fond-Baker方法在丢番图方程中的应用
实用微分几何引论
半群的S-系理论
有限典型群子空间轨道生成的格
有限群导引（上册、下册）
随机模型的密度演化方法
非线性偏微分复方程
调和分析及其在偏微分方程中的应用
惯性流形与近似惯性流形
数学规划导论
拓扑空间中的反例
拓扑空间论
非经典数理逻辑与近似推理
序半群引论
动力系统的定性与分支理论



ISBN 7-03-008745-3
9 787030 087454 >
ISBN-7-03-008745-3/O・1275
定价：35.00元

现代数学基础丛书

同 调 论

——代数拓扑学之一

沈信耀 著

科 学 出 版 社

2002

内 容 简 介

本书是作者在为研究生开设代数拓扑学课程的讲义基础上整理而成的.全书共九章.第零章为预备知识,前三章介绍单纯同调论,第四章为当前流行的范畴论.从第五章开始介绍在一般空间上的连续同调论.后四章是CW空间、一般系数的同调论、乘积空间的同调论和Steenrod运算.

本书论述严谨,深入浅出.作者力图从较直观的几何概念出发引出极为抽象的概念.

本书适合于高校数学系高年级学生和研究生阅读.

图书在版编目(CIP)数据

同调论——代数拓扑学之一/沈信耀著.—北京:科学出版社,2002.7

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-008745-3

Ⅰ.同… Ⅱ.沈… Ⅲ.同调论 Ⅳ.O189.22

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第42741号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年7月第一版 开本:850×1168 1/32

2002年7月第一次印刷 印张:12 1/8

印数:1—2 000 字数:318 000

定价:35.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

序　言

1983 年夏，在改革开放和各项工作复苏的大环境下，为了重新推动代数拓扑学在国内的教学和发展，在厦门大学举办了一次讲习班. 参加的人来自祖国各地. 主讲人 (按讲课顺序) 为陈奕培，沈信耀，姜伯驹和吴振德四位. 当时因为是文化大革命以后，能找到的参考资料不多. 幸好由孙以丰教授翻译的《基础拓扑学》刚好出版，于是就选用它为主要参考书.

从厦门回到北京以后，我就应中国科学院研究生院的邀请，开始在研究生院为研究生开设“代数拓扑学”课程. 为同学开列的参考书，除上述《基础拓扑学》外，还有江泽涵译《拓扑学》，冯康译《组合拓扑学基础》， Vick 著： “Homology Theory”，以及 Greenberg 著： “Algebraic Topology” 等. 开列这么多书是因为不同的年头，不是每种书都好找 (买就更难) . 由于开列的各书内容、讲法不尽相同，再加上听课的同学来自科学院的各个不同研究所，拓扑学的基础相差很多. 因此编写一本适合我们需要的参考书，便成了我的一项任务.

在这种背景下，我开始动手写“代数拓扑学”讲义.

真写起来，首先遇到的是通过这门课要达到什么目的？其次是怎样达到这些目的. 我给自己定的目标是：同学们通过这门课的学习，最主要的是能了解到“代数拓扑学”是怎样的一个学科，它能干什么，是怎样干的. 至于传授代数拓扑学方面的知识，这当然是无疑义的. 但我认为，更重要的是通过这些学习，要将代数拓扑学的基本思想和方法让同学知道，并进而能掌握、运用. 因为具体的知识随着时间的推移，随着课题的变化，它也要更新. 而基本的思想、方法，相对而言更重要，更稳定，更持久. 以同调群为例，我们当然要将它作为最基本的概念予以介绍. 但如果只是从形式上，说它是闭链群模边缘链群的商群，那么同学们将很

茫然. 因此, 如何通过这个形式上的定义, 将基本的几何想法传授给同学, 在我看来是比介绍这个定义更为重要的事. 实际上, 我觉得先讲基本的几何想法, 有了基本想法, 同调群的定义便顺理成章的得出. 这是从大的方面讲、从影响同调论的格局的角度讲. 其他的概念, 我觉得也应该从客观的需要, 很自然的来予以引进. 例如 "星形" 概念, 我在书中的处理, 就和常见的不同. 另外, 为了方便读者, 我还引用记号 "¡", 它后面的内容, 或者是提醒读者该注意的地方, 不要忽略; 或者是帮助读者更好地理解等等.

同学们对代数拓扑学的印象, 一般都是概念多而且抽象, 不好学. 这不奇怪, 因为第一, "先天不足". 我们在大学里面, 相对于分析而言, 几何、代数的训练较少. 而代数拓扑学是几何学的一个分支. 它以代数为工具. 同学们对之可以说是从 "零" 开始, 感到陌生很正常. 第二, 代数拓扑学是以代数为工具来表达、研究拓扑不变量的. 也就是说, 要把代数、几何融合在一起. 这就更增加了难度. 第三, 代数拓扑经常是先建立一套理论, 然后才去解决问题. 如 J. F. Adams 解决 Hopf 不变量为 1 的问题, 就是先建立起高 (二) 阶运算的理论, 然后作为这种理论的一个应用, 把 Hopf 不变量为 1 的问题解决了. 又如他解决球上线性无关的最大切向量场问题, 也是利用 K 理论来完成的. 但我想, 如果能让初学者认识到, 拓扑学的目的是寻求拓扑不变量, 而同调论又是紧紧抓住边界是拓扑不变这一点的话, 那么学习同调论的很多困难都能迎刃而解.

如上所述, 我给自己定的目标是: 介绍代数拓扑学为何物, 它的基本想法是什么, 它能作些什么, 以及是如何作的. 当然这种介绍要通过具体事例来进行. 而阐述同一个思想、方法的事例很多. 因此, 选哪些, 不选哪些, 这就见仁见智了. 而且, 即使选同样的事例, 如何组织这些材料, 从什么角度切入, 安排起来也都会不同. 打一个不一定恰当的比方, 同样是贝多芬的第五交响乐, 同样是同一个交响乐团, 但由于指挥家的理解和诠释的不同, 演

奏出来的乐曲，风格、速度、节奏等都会有所不同.

在众多的以边界为出发点的同调论中，以单纯同调论最为直观、易懂. 因此与当今时尚的书籍均以抽象说法开头不同，我在本书中，仍以单纯同调论开始. 实际上，这一部分，我也经历了取—舍—取的过程. 即开始时，讲单纯同调论，后来不讲了. 但几经比较，从同学接受的角度讲，最终还是将它保留了下来.

讲单纯同调论不仅因为它直观、易于接受. 实际上，一般同调论中的基本东西，在单纯同调论中都有反映. 所以抓住这一环，对初学者而言不无裨益.

单纯同调论占三章.

从第五章开始，介绍如何将 (多面体上的) 单纯同调论推广为 (一般空间上的) 连续 (奇异) 同调论. 由于在建立连续同调论时，从形式上讲，它和单纯同调论的建立差别不大. 因此在这之前，我们将这个过程抽象为链复形. 并以之作为范畴的一个实例. 由于范畴论已成为当今流行的一种数学知识. 我们特辟一章予以简单介绍. 是为第四章.

上面已经提到，连续同调论的建立，在形式上和单纯同调论的建立差别不大. 实际上，连续同调论也仍然是以边界为自己的出发点. 对此，我们在第五章的开头，写了一段详细的阐述. 希望对初学者理解连续同调论的立论之本有所帮助.

第六章介绍 J. H. C. Whitehead 所引进的 CW 空间. 这类空间的重要性，包括它的广泛性，同伦技巧可以施展等，都已被公认. 我们从同调的角度，显示其优越性. 包括在它上面同调论唯一.

第七章介绍一般系数的同调论.

从这一章开始，我们将寻求几何背景的任务逐步转移给读者. 这是因为读者通过前一阶段的学习，应该已经体会到，形式上的代数定义有着明确的几何背景在指引. 不找到这种几何背景，形式上的代数定义将无从理解. 另一方面，也希望借此培养、锻炼读者在这方面的能力.

第八章介绍乘积空间的同调论.

这两章都要用到一些同调代数. 我们结合需要，将它们做了一些介绍.

由于 Steenrod 运算 (代数) 的重要性，我们在最后一章特别予以介绍. 希望为有意继续深入学习、钻研代数拓扑学的读者提供一些方便.

第零章汇集了书中将要用到的一些非拓扑学材料。

本书，从开始动手写初稿，至今已十载有余. 其间除在研究生院讲授外，还曾应邀在北京大学、云南大学讲过. 历届参加听讲的同学，提过不少意见. 我也边讲边改. 每讲一次都要改一些. 但每次改了又都嫌还没改好. 因此，虽早已有要我付梓之说，但迟迟未敢应命. 现在，研究生院原先油印的讲义，虽说是规定开学时借，考试后还. 但每次都不能如数收回. 每学期总有一些同学觉得用起来方便而忘了返还. 多年下来，所余之数已不敷周转所需. 重印又不可能. 于是抱着抛砖引玉，为历届同学留一书面材料和为今后想学代数拓扑的学人提供一些方便，便将有关同调论的材料重新审订增补一遍，编成此册，是为代数拓扑学之一. 余下的内容，有关同伦论，广义同调论等部分就留待他日了.

限于作者的水平，奢望如上，但一下子肯定达不到. 因此希望使用本书的老师、同学和其他读者多提意见，以便完善.

本书校样，余建明同志和潘建中同志分头看了前一部分 (到第三章) 和后一部分，提了一些改进意见. 潘建中同志在排版安排插图方面，李春英同志在纠正排版错误方面出了不少力. 在此向他们表示感谢. 作者还对科学出版社刘嘉善同志在本书的出版方面所做的多方协助表示感谢.

作　者

2002 年 2 月

目 录

绪 论

本书介绍代数拓扑学，特别是其中的同调论．那么，什么是代数拓扑学呢？

代数拓扑学是拓扑学的一个分支，而拓扑学属于几何学．因此为了回答什么是拓扑学，首先需要回答什么是几何学．

几何学，对于我们大家来说并不陌生．我们从孩提时代开始就熟悉客观世界的几何图形．到了小学，我们学画图．到了中学，我们有平面几何和立体几何课．在大学，有解析几何、微分几何等课程．可是，到底什么是几何学呢？真要说清楚这个问题还并不容易．

下面我们介绍德国数学家 F. Klein 的看法．

德国数学家 Klein (1849~1925) 于 1872 年接替 von Staudt 出任 Erlangen 大学哲学院教授时，有一个就职演说 —— 最新几何研究的比较评论．在这篇就职演说里，他阐述了他的几何观．后人称之为 Erlangen 纲领．

Erlangen 纲领，不仅总结了到 19 世纪 70 年代为止所发现和研究的各种几何，还提出了什么是几何学的统一观点．

简单说，他认为，构成一门几何学，有两个要素．这两个要素是：一为由某种元素所构成的集合 (空间)；另一是，要有作用在这个空间上的一个变换群．空间里的两个图形 (子集) 叫做相等，如果存在变换群里的一个变换，将其中一个变为另一个．由于这个变换取自变换群，所以这样定义的相等是一个等价关系 (为什么？)．于是空间里的图形便被分成一些等价类．研究同一个等价类里各元素 (图形) 所共有的性质，即研究空间的图形 (子集) 在这个变换群下不变的性质，便构成一门几何学．特别地，研究等价类的特征性质，即寻求全系不变量的问题，更是各门几何学的中心课题．

这里，变换群和空间在决定几何学时同样重要. 实际上，同一个空间，可能有不同的群在上面作用. 于是同一个空间上，可以有多种几何学存在. 特别，如果群 G 作用在空间 K 上，那么群 G 的子群 H 也可以作用在 K 上. 于是 K 上就有相应于 G 和 H 的两种几何. 显然，在 G 下不变的性质，也在 H 下不变. 但反过来，在 H 下不变就不一定在 G 下不变. 因此 K 上相应于 G 的几何，其内容比之 H 的几何要“少些”. 也就是说，群越大的几何，其内容越“贫乏”. 不过，这时，它的几何更“稳定”，适用范围更广. 当然，因为它在更广的范围成立，也就更不容易获得. 不过，一旦获得，它就具有更大的普遍性.

下面我们来看一些例子.

中学学过的、以公理方式展开的平面几何，是研究平面上的图形，在刚体运动 (由平移，旋转和反射构成的) 群下不变的性质. 这时的不变量有距离，交角等. 而两个三角形合同 (属于同一个等价类) 的充要条件是相应边相等，或两边夹一角相等. 这些都是三角形合同的全系不变量.

这个几何，由于使用了欧氏平行公设：“过线外一点，有一条而且只有一条直线和它不相交”. 所以也称为欧氏几何.

立体几何情况类似.

在解析几何里面，我们用坐标来表示点. 一个可逆变换叫做仿射变换，如果变换后的点，其坐标可用原来那个点的坐标的线性函数表示. 显然，所有的仿射变换构成一个群，叫做仿射变换群. 研究在这个变换群下不变的性质，便是仿射几何. 这时的不变量有：直线 (直线仍变为直线)，直线的平行性 (相交)，线段的中点，直线上三个点的简单比值等. 又，椭圆 (椭圆仍变为椭圆)，抛物线 (抛物线仍变为抛物线)，双曲线 (双曲线仍变为双曲线) 等也是仿射不变量.

在微分几何里面，我们利用微积分作为工具来研究比直线、二次曲线更一般的光滑曲线. 我们知道，平面曲线完全由其曲率决定，即曲率构成了一组全系不变量. 而空间曲线则由曲率和挠

率这两个函数决定. 亦即, 这两个函数构成了空间曲线合同与否的全系不变量.

除了以上这些几何以外, 我们知道还有所谓的投影几何学. 亦即, 研究图形在投影变换群下不变的几何学. 这时的不变量有: 线性关系, 共线 (点) 性, 交比, 二次曲线等.

不难看出, 以上几个群中, 投影变换群是最大的一个群. 仿射变换群是它的一个子群, 而刚体运动群又是仿射变换群的子群.

Klein 的 Erlangen 纲领, 是从总结到他那个时代为止的、各种几何所要完成的目标是什么这样一个高度而得到的. 他的这个总结, 可以说是继往开来的一个里程碑. 实际上, 他不仅总结、概括了当时的各种几何学, 而且明确地提出了, 应该研究拓扑学——一门研究图形在拓扑变换群下如何分类的新几何学. 特别是如何找全系不变量.

当然, Klein 关于什么是几何学的观点, 也有其时代的局限性. 今天的代数几何与微分几何就都不能统一于 Klein 的观点之下. 但在当时, 他的这个观点, 不仅给各种几何以一个系统的分类, 并提供了很多可供研究的方向. 此外, 他的这个有关研究变换群下不变性的观点, 其影响已超出数学本身, 而扩大到力学和一般的数学物理. 当人们注意到 Maxwell 方程经 Lorentz 变换是不变的以后, 变换下不变性的物理问题, 或者, 物理定律的表达方式不依赖于坐标系的问题也变得十分重要了.

在 Klein 关于什么是几何学的观点影响下, 拓扑学开始明确了自己的任务 (在此之前, 拓扑学虽已崭露头角, 但究竟应该如何推进, 并不明确), 这就是研究空间里图形的这样一些性质: 它们在拓扑变换之下是不变的, 特别是定出全系不变量. 于是自然会问: 有些什么性质是拓扑不变的呢? 我们又如何去寻求这些不变量呢? 它的全系不变量为何?

为此, 我们回顾一下拓扑变换的定义.

一个映射 (连续变换) 叫做是一个拓扑变换 (或同胚映射), 如果它本身是一一的, 它的逆变换也是连续的. 两个空间叫做是同

胚的，如果能找到一个同胚映射，将其中一个变为另一个．由于拓扑变换是如此的一般，因此，许多常见的量，例如，长度、角度等刚性量，不可能是拓扑不变的．同样，平行性，二次曲线也不可能在拓扑变换下不变．总之，空间的许多性质，在拓扑变换下要变．那么有无不变的呢？有的话，是哪些？怎么处理和利用它们呢？

拓扑学，从处理的方法上讲，可以分为点集拓扑学（或称一般拓扑学），代数拓扑学（又称组合拓扑学）和微分拓扑学．点集拓扑学是从集合论的角度，将几何图形视为点的集合，或进而视为空间（有邻域概念的点集)，用集合论的方法予以研究．代数拓扑学，则是寻求并研究空间的、用代数形式表现出来的拓扑不变量．它早期是利用组合方法．现在发展成利用函数空间来达到目的．由于它只涉及连续性，因此，强有力的微积分工具，这时就无用武之地了．这大概也是许多人觉得代数拓扑学比较抽象、难接受的原因之一．与此形成对比的是微分拓扑学．微分拓扑学是利用微积分为工具，对流形进行研究．拓扑学的这些分支，它们互有区别，但又紧密相关．

上面已经提到，空间的许多性质在拓扑变换下是要变的．但是，也不是什么都得变．例如，空间的紧性，连通性就是拓扑不变的．实际上，这就是点集拓扑所关心的．那么从代数拓扑的角度看，有些什么性质是拓扑不变的呢？显然，两条曲线的交点数目是拓扑不变的．同样，不难想像，图形的相对位置关系是拓扑不变的．特别，图形及其边界的相对位置关系是拓扑不变的．但是，这是从几何上讲的．如何将它严格化、代数化呢？本书将要介绍的同调论，就是从这里演变出来的理论．

为了便于看清它的作用，我们先把“图形及其边界的相对位置关系是拓扑不变的”改述为“图形 γ 在空间 X 中是否为另一图形 Γ 的边界是拓扑不变的”．也就是说，γ 如果在 X 中为 Γ 的边界．那么，经拓扑变换 t 作用后，这一关系仍然保持．显然，γ 是否为 Γ 的边界，是一个整体性问题．即，它依赖于所考虑的

空间 X . 当空间 X 变化时，原来是边界的可以变成不是. 反过来，原来不是的，也可能随着空间 X 的扩大而变成是的. 例如，Γ 为平面上的单位圆盘，γ 为它的边界，即单位圆周. 于是当 X 为 Γ 时，γ 在 X 中为边界. 可是取 X 为 γ , 那么 γ 在 $X(=\gamma)$ 中就不再是另一图形的边界了. 所以我们说，一个图形是否为另一个图形的边界，和你在什么空间考虑有关. 也就是说，这是一个整体性的问题.

另一方面，一个图形是否为另一图形的边界，它不仅为拓扑变换所保持，实际上，这一性质也为映射所保持. 也就是说，γ 为 Γ 的边界的话，那么 $\varphi(\gamma)$ 和 $\varphi(\Gamma)$ 间也存在这种关系，这里 φ 为映射.

现在我们利用映射保持边界关系不变这一点，来说明单位圆盘 E^2 不可能有映入其边界 S^1 的映射 φ , 使 φ 限制在边界 S^1 上为恒同映射. 这只要注意，如果这种映射存在. 那么由于 S^1 在 E^2 中是边界，故经 φ 作用后，$\varphi(S^1)=S^1$ (这是 φ 在边界 S^1 上为恒同映射的条件) 在 $\varphi(E^2)=S^1$ 中也应为边界. 但显然这不可能.

利用上述“单位圆盘 E^2 不可能有映入其边界 S^1 的映射 φ, 使 φ 限制在边界 S^1 上为恒同映射”这个结论，我们就可以证明著名的 Brouwer 不动点定理：单位圆盘 E^2 上的任意一个自映射 f 必有不动点.

如果 $f:E^2\to E^2$ 没有不动点，即对任意的 $x\in E^2$, 均有 $f(x)\neq x$, 那么就可以从 $f(x)$ 往 x 作射线. 设此射线与 E^2 的边界 S^1 交于点 $\varphi(x)$. 这样我们就有映射

$$\varphi:E^2\to S^1,$$

但它限制在 S^1 上却是恒同映射！这不可能.

从这里可以看出，“图形的相对位置关系是拓扑不变的”这一点，并不像乍看那样不显眼，没有多大用处. 实际上，由它演绎出来的同调论，今天已经发展成数学的一个蔚为壮观的科目. 本

书将介绍它的一部分内容. 但是, 毕竟同调论只利用了边界关系是拓扑不变这一点, 许多不能用这一关系导出的性质, 同调论就无能为力了. 例如, 不能用它来区别两个空间是否同胚的问题. 所以虽然同调论有很丰硕的成果, 但是它并不构成全系不变量. 实际上, 空间的拓扑分类问题至今没有彻底解决, 只是在一些特殊的情形找到了全系不变量.

从边界是拓扑不变出发的同调群, 经过许多数学家的努力, 发现它就是由某种函数空间在一种叫做同伦的等价关系下的等价类所构成的群. 实际上, 以 X 为定义域 (或值域) 的函数空间是 X 的拓扑不变量早就知道. 只是这种空间没法处理, 没法利用, 所以一直放在一边. 随着拓扑本身和其它数学分支的发展, 今天我们已经有能力对函数空间进行研究, 因此同调论也进入一个新的发展阶段. 不过, 建立在边界关系是拓扑不变的这一事实之上的同调论, 仍然发挥着它的作用, 不容忽视.

第零章　欧氏空间、群、模的有关材料

这一章，我们将以后要用到的有关欧氏空间，群和模的材料汇总如下.

0.1　定义　设 G 是一个非空集合，$\circ: G\times G\to G$ 是函数. 如果下述条件 1)—3) 成立，则称 G 为群，$\circ$ 是它的运算.

1) 结合律：$a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$,

2) 有单位元：存在 e 使 $e\circ g=g\circ e=g$ 对任意的 $g\in G$ 成立,

3) 有逆元：对任意的 $g\in G$，有 $g^{-1}\in G$ 使 $g\circ g^{-1}=g^{-1}\circ g=e$.

当群 G 的运算 $\circ$ 适合

4) 交换律：$g\circ g'=g'\circ g$ 对任意的 $g,g'\in G$ 成立时，称 G 为交换群，或 Abel 群. 在交换群里，运算 $\circ$ 记为 $+$，元素 e 记为 0, 而 g^{-1} 记为 $-g$.

¡　可以证明:

1) 群中适合条件 2) 的元 e 唯一，称为 G 的单位元,

2) 群中适合条件 3) 的元 g^{-1} 唯一，称为 g 的逆元.

0.2　定义　集合 V 满足条件:

1) V 中有一个运算 $+$. 在这个运算下，V 是 Abel 群,

2) V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的模，即：对 $x\in V$ 和实数 $\lambda\in\mathbb{R}$，有数乘 $\lambda x\in V$，使

(i) $1x=x, x\in V$,

(ii) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ x,y\in V$,

(iii) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x),\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},x\in V$

成立，则称 V 为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，或简称为实线性空间. V 中的元素叫做点或向量. 向量 x 和 y 的差 $x-y=x+(-y)$.

0.3　例　行向量 $(m_1,\cdots,m_n)$ 的全体，按下面的运算和数乘构成一个线性空间：

$$(m_1,\cdots,m_n)+(l_1,\cdots,l_n)=(m_1+l_1,\cdots,m_n+l_n),$$

$$\lambda(m_1,\cdots,m_n)=(\lambda m_1,\cdots,\lambda m_n).$$

0.4　定义　设 $x_1,\cdots,x_k$ 为线性空间 V 中的一组向量，$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 为实数．称表达式

$$\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k$$

为 $x_1,\cdots,x_k$ 的线性组合．而

$$\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k=0$$

为 $x_1,\cdots,x_k$ 的线性关系．

0.5　定义　线性空间 V 中的一组向量 $x_1,\cdots,x_k$ 叫做是线性相关的，如果存在不全为零的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 使线性关系

$$\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k=0$$

成立．否则称它们为线性无关的．

0.6　命题　向量组 $x_1,\cdots,x_k$ 是线性相关的，当且仅当存在一个向量，它可写为它前面的诸向量的线性组合．

0.7　定义　线性空间 V 中的一组向量 $x_1,\cdots,x_k$ 叫做是一个母元组，如果 V 中的每个向量都可以用它们的线性组合表示．

一个母元组叫做一个基，如果母元组中的诸向量是线性无关的．

0.8　命题　从每个母元组中总可以挑出一个基．

0.9　命题　如果向量空间 V 的某个基中只有有限个向量，那么其他的基中也只有有限个向量，而且个数相同．这个数 n 叫做线性空间 V 的维数．这时将 V 记为 V^n．

0.10　命题　设 $u_1, \cdots, u_n$ 为线性空间 V 的一个基. 那么 V 中的每个向量 x 都可以唯一表为

$$x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

数组 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 称为向量 x 关于基 $u_1, \cdots, u_n$ 的坐标，记作 $x = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

0.11　定义　设 V 和 V' 是两个线性空间. 对应 $\varphi : V \to V'$ 叫做线性变换，如果 $\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2)$ 对 $x_1, x_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 都成立.

0.12　定义　设 $u_1, \cdots, u_n$ 和 $u'_1, \cdots, u'_m$ 分别是向量空间 V 和 V' 的基，又 $\varphi : V \to V'$ 为线性变换. 若

$$\varphi(u_i) = \sum_{j=1}^{m} \xi_{ij} u'_j, \quad i = 1, \cdots, n,$$

矩阵 $(\xi_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$，叫做 φ 对于基 $u_1, \cdots, u_n$ 和 $u'_1, \cdots, u'_m$ 而言的矩阵.

0.13　定义　设 V 为向量空间. 对应 $f : V \to \mathbb{R}$ 叫做 V 上的线性函数，如果 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ 对 $x_1, x_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 成立.　V 上的线性函数可以相加，可以和数乘. 在这些运算下构成一个向量空间，叫做向量空间 V 的对偶空间，记为 V'.

0.14　定义　设 V 为向量空间，$e_1, \cdots, e_n$ 为 V 的基，对偶空间 V' 里由 [1)]

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le n,$$

决定的 $f_1, \cdots, f_n$ 构成 V' 的一个基, , 叫做 $e_1, \cdots, e_n$ 的对偶基.

---

1)　δ_{ij} 为 Kronecker 符号：　$\delta_{ii} = 1$,　$\delta_{ij} = 0$,　如果 $i \neq j$.

0.15　定义　设 $V, \overline{V}$ 为向量空间, $\varphi: V \to \overline{V}$ 为线性变换, 那么用 $\varphi^\bullet(g)(f) = g(\varphi(f)), f \in V, g \in \overline{V}'$ 所决定的

$$\varphi^\bullet(g) \in V',$$

而且 $\varphi^\bullet: \overline{V}' \to V'$ 为线性变换, 叫做 φ 的对偶变换.

0.16　命题　设 $V, \overline{V}$ 为向量空间, $\varphi: V \to \overline{V}$ 为线性变换, $e_1, \cdots, e_n$ 和 $\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m$ 分别为 V 和 $\overline{V}$ 的基, A 为 φ 在这两组基下所对应的矩阵, 那么 φ 所决定的对偶变换 $\varphi^\bullet: \overline{V}' \to V'$, 在对偶基 $\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m$ 和 $f_1, \cdots, f_n$ 下所对应的矩阵为 A 的转置

$$B = A^T.$$

0.17　定义　线性空间 V 的一个子集 W , 叫做是 V 的一个线性子空间, 如果 W 对于 V 中的运算 $+$ 和数乘封闭. 亦即, W 的元对于 V 中的运算和数乘构成一个线性空间. 当这个线性空间的维数是 q 时, 称 W 为 V 的 q 维线性子空间.

0.18　例　设 $x_1, \cdots, x_k$ 为线性空间 V 中的 k 个向量. 那么所有的线性组合

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$$

构成 V 的一个线性子空间 W . 称 W 是由 $x_1, \cdots, x_k$ 生成的. 显然, $x_1, \cdots, x_k$ 构成 W 的一个母元组.

0.19　命题　向量组 $x_1, \cdots, x_k$ 是线性无关的, 当且仅当由它们生成的子空间 W 为 k 维的.

0.20　定义　从空间中点 O 出发的所有有向线段, 构成一个线性空间 L , 这时的运算是取平行四边形的对角线. 数乘是将线段之长乘以 λ , 方向视 λ 的负、正而决定改变与否.

线性空间 L 有以下的线性子空间: 设 OA, OB 是从 O 出发的两个不共线的有向线段. 那么 $\{\lambda OA\}$ 就是一个 1 维子空间 (直线) , 而 $\{\lambda OA + \mu OB\}$ 为 2 维子空间.

但是, 在空间中, 除了这些通过点 O 的直线和平面以外, 还有通过其他点的直线和平面存在. 不过, 这些直线和平面都不是

L 的线性子空间. 但它们显然和过点 O 的直线与平面一样重要. 因此, 不应该把它们排斥在外.

0.21　定义　设 W 为线性空间 V 的 q 维子空间, $a \in V$. 称

$$a + W = \{a + w | w \in W\}$$

为 V 的 q 维仿射子空间.

0.22　命题　设 $w_1, \cdots, w_q$ 为线性空间 V 的线性子空间 W 的基. 那么仿射子空间 $a + W$ 的元

$$a + w = a + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_q w_q,$$

而且这个表达式是唯一的.

0.23　命题　沿用 0.22 中的记号. 令 $a_i = a + w_i$, 那么

$$a + w = (1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_q)a + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_q a_q.$$

这个表达式也是唯一的.

0.24　命题　沿用 0.23 中的记号. 令 $a_0 = a, \lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_q$, 那么 $a + W$ 中的元

$$a + w = \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_q a_q,$$

而

$$\lambda_0 + \cdots + \lambda_q = 1.$$

这个表达式是唯一的.

0.25　定义　设 $a_0, \cdots, a_q$ 为线性空间 V 中的 $q+1$ 个点. 当

$$\lambda_0 + \cdots + \lambda_q = 1$$

时, 称表达式

$$\lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_q a_q$$

为 $a_0,\cdots,a_q$ 的仿射组合. 而

$$\lambda_0 a_0+\cdots+\lambda_q a_q=0$$

当

$$\lambda_0+\cdots+\lambda_q=0$$

时, 为 $a_0,\cdots,a_q$ 的仿射关系.

0.26 定义 线性空间 V 中的 $q+1$ 个点 $a_0,\cdots,a_q$ 叫做是仿射相关的, 如果他们之间有非平凡的仿射关系, 即存在不全为零的 $\lambda_0,\cdots,\lambda_q$ 使

$$\lambda_0+\cdots+\lambda_q=0,$$

$$\lambda_0 a_0+\cdots+\lambda_q a_q=0$$

成立. 否则, 就称 $a_0,\cdots,a_q$ 为仿射无关的.

0.27 命题 线性空间 V 中的点组 $a_0,\cdots,a_q$ 是仿射相关的, 当且仅当存在一个点它可写为它前面的诸点的仿射组合.

0.28 定义 仿射子空间 A 中的点组 $x_0,\cdots,x_k$ 叫做是一个仿射母元组, 如果 A 中的每个点都可以用它们的仿射组合表示.

0.29 例 设 $x_0,\cdots,x_k$ 为线性空间 V 中的 $k+1$ 个点. 那么它们的仿射组合全体构成 V 的一个仿射子空间 A. 称 A 是由 $x_0,\cdots,x_k$ 生成的. 显然, $x_0,\cdots,x_k$ 是 A 的一个仿射母元组.

0.30 命题 点组 $x_0,\cdots,x_k$ 是仿射无关的, 当且仅当由它们生成的仿射子空间 A 是 k 维的.

0.31 命题 对于点组 $x_0,\cdots,x_k$ 而言, 以下条件等价:

(i) 它们仿射无关,

(ii) 向量组 $x_1-x_0,\cdots,x_k-x_0$ 线性无关,

(iii) 假设 x 是由 $x_0,\cdots,x_k$ 生成的仿射子空间 A 中的点, 那么 x 可唯一表为 $x_0,\cdots,x_k$ 的仿射组合:

$$x=\lambda_0 x_0+\cdots+\lambda_k x_k$$

而

$$\lambda_0 + \cdots + \lambda_k = 1.$$

点组 x_0, x_1 是仿射无关的，当且仅当 $x_1 \neq x_0$. 亦即 x_0 和 x_1 是不同的两个点. 点组 x_0, x_1, x_2 是仿射无关的，当且仅当它们不共线.

在线性空间里面，缺少平常空间常用的概念和性质. 例如长度，角度，无向积等. 因此，为了在线性空间里面也包含这些常用的概念和性质，我们需要引进无向积. 为此，我们介绍线性欧几里得空间.

0.32　定义　线性空间 V^n 叫做线性欧几里得空间, 如果对 V^n 中的任意两个向量 x 和 y ，都对应有一个实数 xy ，满足以下三个条件:

1) 线性性:　$(\lambda x + \mu y)z = \lambda xz + \mu yz,$

2) 对称性:　$xy = yx,$

3) 恒正性:　$xx \geq 0$, $xx = 0$ 当且仅当 $x = 0.$

实数 xy 叫做向量 x 和 y 的无向积.

0.33　例　行向量 $(m_1, \cdots, m_n)$ 的全体, 按下面的运算, 数乘和无向积构成一个线性欧几里得空间:

$$(m_1, \cdots, m_n) + (l_1, \cdots, l_n) = (m_1 + l_1, \cdots, m_n + l_n),$$

$$\lambda(m_1, \cdots, m_n) = (\lambda m_1, \cdots, \lambda m_n),$$

$$(m_1, \cdots, m_n)(l_1, \cdots, l_n) = m_1 \times l_1 + \cdots + m_n \times l_n,$$

这个线性欧几里得空间叫做欧氏空间，记为 E^n. E^n 中的点 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)$ 构成一组基.

在任意的线性空间 V^n 中，都可以用下面的办法来引进无向积.

设 $e_1, \cdots, e_n$ 为 V^n 的一组基. 对 V^n 中的向量 $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ 和 $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ ，命

$$xy = \lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_n \mu_n.$$

不难验证，这样定义的 xy 满足无向积的三个条件．所以每个线性空间都可以变成线性欧几里得空间．

在线性欧几里得空间里面，可以引进一个尺度如下：

$$\rho(x,y)=((x-y)(x-y))^{\frac{1}{2}}.$$

它是尺度，即适合下面四个条件：

1) $\rho(x,y)\geq 0$,

2) $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$,

3) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$,

4) $\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z)$.

有了尺度，我们就可以在线性欧几里得空间里面引进拓扑．

0.34　定义　欧氏空间 $\mathcal{R}^n$ 中两个不同的点 a 和 b 决定一条以 a,b 为端点的线段

$$(a,b)=(b,a)=\{x|x=\lambda a+\mu b,\lambda\geq 0,\mu\geq 0,\lambda+\mu=1\}.$$

0.35　定义　欧氏空间 $\mathcal{R}^n$ 中的点集 C 叫做凸的，如果由 a 和 $b\in C$ 可以推出线段 $(a,b)\subseteq C$. 当紧凸集 C 有内点时，称做凸体．

0.36　定义　群 G 的部分元素 H，如果在群 G 的运算下封闭，那么就称 H 为群 G 的子群．

如果 A 和 B 为群 G 的子集，令

$$AB=\{ab|a\in A,b\in B\}.$$

特别，如果 H 为群 G 的子群， $g\in G$，称 gH 为子群 H 在群 G 中的 (左) 陪集，而 g 为这个陪集的代表．

0.37　命题　子群 H 在群 G 中的陪集两两不交．当群 G 是交换群时，命 $g_1H+g_2H=(g_1+g_2)H$ 的话，那么在这个运算下，所有的陪集构成一个群，叫做群 G 模子群 H 的商群，记为 G/H.

0.38 定义 设 G 和 H 都是群. 对应 $f: G \to H$ 叫做同态, 如果 $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$ 对 G 中任意的 g_1 和 g_2 都成立.

对于同态 $f: G \to H$. 集 $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(e)$, 和 $\mathrm{Im} f = f(G)$, 为子群, 称为 f 的核和象, 这里 e 是 H 的单位元. 当 $\mathrm{Ker} f = e$ 时, 称 f 为单同态. 当 $\mathrm{Im} f = H$ 时, 称 f 为满同态. 当 f 既单又满时, 称 f 为同构, 记做 $f: G \cong H$. 显然, 同构关系是一个等价关系.

0.39 定理 (第一同构定理) 设 $f: G \to H$ 为交换群 G 和 H 间的一个同态. 那么

$$\mathrm{Im} f \cong G/\mathrm{Ker} f.$$

0.40 定义 设 A, B 为交换群 G 的子群. 它们的和

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}.$$

0.41 定义 设 A, B 为交换群 G 的子群. 如果群 G 的任一元素 g 都可以唯一表为

$$g = a + b, \quad a \in A, \quad b \in B.$$

那么就称 G 为 A 和 B 的直和, 记为 $G = A \bigoplus B$. 称 $A(B)$ 为 G 的直加项.

0.42 定理 (第二同构定理) 设 A, B 为交换群 G 的子群. 那么

$$(A + B)/B = A/A \cap B.$$

0.43 定义 设 $g_1, \cdots, g_k$ 为交换群 G 的一组元素, $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 为整数. 称表达式

$$\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k$$

为 $g_1, \cdots, g_k$ 的线性组合. 设 A 为交换群 G 的一组元素. 如果对 G 中的元 g , 有 A 的元 $g_1, \cdots, g_k$ 使 g 为 $g_1, \cdots, g_k$ 的线性

组合，那么就称 A 为 G 的一个母元组. 当 A 为有限集时，称 G 为有限生成的.

0.44 定义 交换群 G 中的一组元素 $g_1, \cdots, g_k$ 叫做是线性相关的，如果存在不全为零的整数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 使线性关系

$$\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k = 0$$

成立. 否则称它们为线性无关的. 群 G 的一族元素 x_α, 如果含有线性相关的有限元素组，那么就称这一族元素为线性相关的. 否则就称它们为线性无关的. 线性无关的一族元素叫做是最大的，如果添任意一个元素以后它就不再是线性无关的.

0.45 命题 如果 $A = (g_1, \cdots, g_m)$ 和 $B = (h_1, \cdots, h_n)$ 都是群 G 中的最大线性无关组. 那么 $m = n$.

0.46 定义 如果 $(g_1, \cdots, g_n)$ 是交换群 G 的一个最大线性无关组，称 n 为 G 的秩. 如果这种有限组不存在，称 G 的秩为无限.

0.47 定义 群 G 中的元 g 叫做是有限阶的，如果存在 n 使 $ng = 0$. 否则就称为无限阶的.

0.48 命题 如果 G 是由一个元 a 生成的. 那么 G 为下列情况之一：

(1) G 是零群,

(2) G 是有限循环群. 即有最小的 $n \geq 0$ 使 $na = 0$, 这时它和整数 mod$n$ 群 $\mathbb{Z}/n$ 同构,

(3) G 是无限循环群，即和整数群 $\mathbb{Z}$ 同构.

0.49 命题 如果交换群 G 是有限生成的，那么 G 的子群和商群也都是有限生成的.

0.50 定义 设 B 为交换群 G 的最大线性无关组，如果 B 还是 G 的母元组，则称 G 为自由交换群， B 为 G 的基。

0.51 命题 设 G 为自由交换群， B 为 G 的基，那么由 B 到交换群 H 的一个对应可以线性扩充为 G 到 H 的同态.

0.52 命题 对有限生成的交换群 G ,

(1) G 中的有限阶元全体构成一个子群, 叫做 G 的挠子群, 记为 T ,

(2) G/T 是自由群.

0.53 定理 (有限生成的交换群的基本定理) 如果 G 是有限生成的交换群, 那么

$$G = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\beta} \oplus \mathbb{Z}/\tau_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\tau_\theta,$$

这里整数 $\tau_1 | \cdots | \tau_\theta$.

0.54 定义 环 R 是一个带有两种运算 (叫做加法和乘法) 的集合. 它在加法下为交换群, 而乘法满足结合律. 此外, 有下面的分配律成立:

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (b+c)a = ba + ca, \quad a, b, c \in R.$$

当乘法可交换时, 称 R 为交换环. 当乘法有单位 1 时, 称 R 为有单位 1 的环.

以下提到的环都是有单位的交换环.

0.55 定义 如果环 R 的非零元全体, 对于乘法而言成为一个群, 就称它为域.

0.56 定义 环 R 的元 $a \neq 0$ 叫做零因子, 如果有 $b \neq 0$ 使 $ab = 0$. 没有零因子的 $(1 \neq 0$ 的) 环叫整环.

0.57 定义 环 R 的加法子群 I 叫做理想, 如果对 $a \in R, g \in I$ 有 $ag \in I$. 由元 $x \in R$ 生成的 $xR = Rx = \{xa | \forall a \in R\}$ 是一个理想, 叫做主理想. 每个理想都是主理想的整环叫做主理想整环.

0.58 定义 环 R 上的模 M 是这样一个交换群 (运算记为 $+$):R 可以作用在 M 上, 即 $R : M \to M$. 这个作用适合以下条件:

$$a(x+y) = ax + ay,$$

$$(a+b)x = ax + bx,$$

$$(ab)x = a(bx),$$

$$1x = x,$$

$$(a, b \in R, x, y \in M).$$

当 M 为环 R 上的模时，称 M 为 R 模.

0.59 例 环 R 的理想是 R 模. 环 R 本身也是 R 模.

0.60 例 (交换) 群是 $\mathbb{Z}$ 模. 域 F 上的模就是向量空间.

和群 ($\mathbb{Z}$ 模) 一样，对 R 模，我们也有生成元，基，自由模，循环模，子模以及有限生成模，直和等概念.

0.61 定理 如果 R 是主理想整环，M 是有限生成的 R 模，那么 M 是循环模的直和：

$$M = Rx_1 \oplus \cdots \ominus Rx_k,$$

这里 $ann(x_i) = \{r| \in R, rx_i = 0\} \neq R$ 使

$$ann(x_1) \supset ann(x_2) \supset \cdots \supset ann(x_k).$$

并且这种分解是唯一的.

第一章　单纯同调论

§1. 单形、复形、同调群

设 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ 为欧氏空间 E^n 中的仿射无关点组. 那么由它们生成的仿射子空间

$$A = \left\{ a = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i \middle| \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

是 k 维的. 而且 A 中的元 a 的这种表示法唯一.

1.1　定义　若 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ 为欧氏空间 E^n 中的仿射无关点组. 那么 A 的子集

$$A^k = \left\{ a = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i \middle| \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 0, 1, \cdots, k \right\}$$

称为是由顶点 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ 张成的 k 维 **单形**. 这个单形有时也记为 $(a_0 a_1 \cdots a_k)$.

¡　由于 A^k 的点为 $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i$, 满足条件 $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0, i = 0, 1, \cdots, k$. 这时此记法唯一. 因此可以将 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ 作为 a 的坐标. 这个坐标称为 a 关于仿射无关点组 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ 的 **重心坐标**, $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 为它的分量. 它的物理背景是: 当 $n = 3$ 时, 若点 a_i 处具有质量 $\lambda_i \geq 0, i = 0, 1, \cdots, k$. 那么它们的质量中心就在点 a 处.

重心坐标的诸分量全为正的点叫做 A^k 的 **内点**. 特别诸分量全相等的点 ——**重心**—— 是内点 (A^k 的重心以后记为 $\overset{*}{A}{}^k$). A^k 中非内点的点叫做 **边界点**. 内点全体所构成的子集叫做 **开单形**, 记为 $\overset{\circ}{A}{}^k$. 边界点全体构成 **边界**, 记为 $\dot{A}^k$.

对于 k 维单形 $A^k=(a_0a_1\cdots a_k)$, 我们知道 $a_0,a_1,\cdots,a_k$ 的任一子集 $a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_s}$ 也是仿射无关的, 因此也张成一个单形 $B^s=(a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_s})$, 称它为 A^k 的 s 维**面**. 记作 $B^s\le A^k$. 显然, 这时 B^s 的点的重心坐标, 由 $\lambda_j=0, 0\le j\ne i_t\le k, t=0,1,\cdots,s$, 刻画. 特别, A^k 是它自己的面. A^k 的其它面叫做**真面**, 用 "<" 表示, 因此, 真面的维数 $<k$.

¡ 1) 显然, 零维单形 $A^0=(a_0)$ 就是 a_0 这个点. 我们以后把顶点和它所决定的 0 维单形等同为一. 1 维单形 $A^1=(a_0a_1)$ 就是以 a_0,a_1 为端点的闭线段, 故也称为棱. 而 2 维单形 $A^2=(a_0a_1a_2)$ 就是以 a_0,a_1,a_2 为顶点的闭三角形. 这一点可以这么看, 设 $a\ne a_0$, 即 $t_0\ne 1$. 那么

$$\begin{aligned}a&=\sum_{i=0}^{2}t_ia_i=t_0a_0+(1-t_0)\left(\frac{t_1}{1-t_0}a_1+\frac{t_2}{1-t_0}a_2\right)\\&=t_0a_0+(1-t_0)a',\end{aligned}$$

其中 $a'=\frac{t_1}{1-t_0}a_1+\frac{t_2}{1-t_0}a_2\in(a_1a_2)$. 因此 a 位于 a_0 和 a' 所决定的线段上; 反过来, 这样的点, 它们当然属于单形 $(a_0a_1a_2)$. 同样可以证明: 3 维单形 $A^3=(a_0a_1a_2a_3)$ 就是以 a_0,a_1,a_2,a_3 为顶点的闭四面体. 而更高维的单形就是这些平直图形的推广 (见图 1.1).

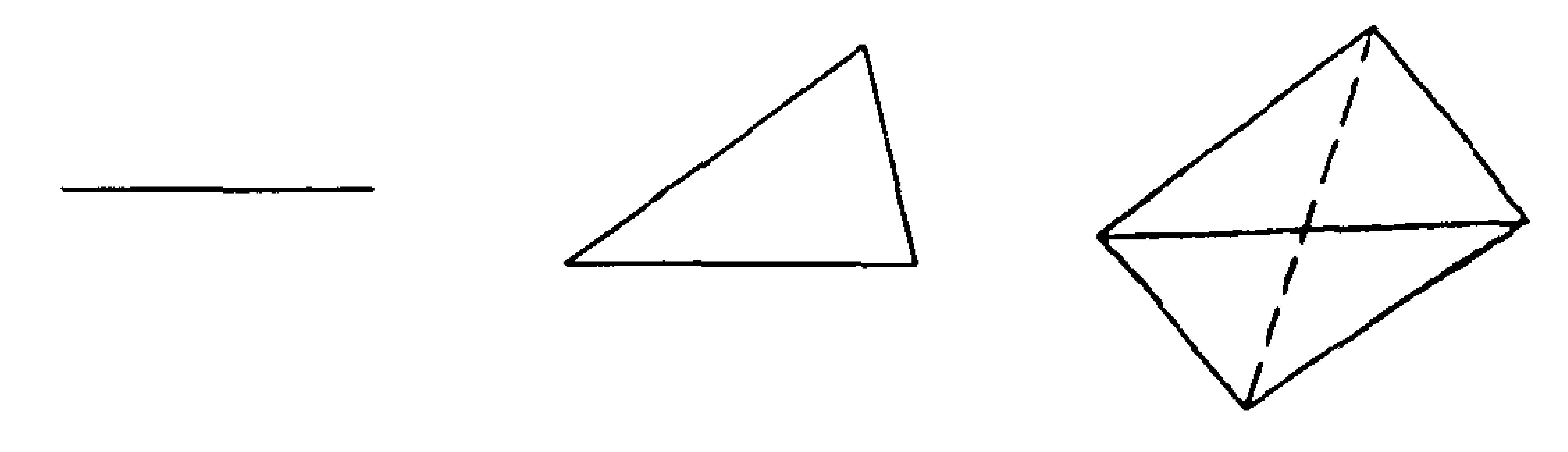


图 1.1

2) 对于仿射子空间 A 中的拓扑而言, $\mathring{A}^k$ 为 A^k 的内部, $\dot{A}^k$ 为 A^k 的边界.

3) 单形 A^k 的内点, 对于 E^n 的拓扑而言, 不必为内点. 同

样，单形 A^k 的边界 $\dot{A}^k$ 也不必为 A^k 在 E^n 中的边界. 但 $\mathring{A}^k$ 在 E^n 中的闭包是 A^k，故 A^k 是 E^n 中的有界闭集.

1.2 命题 单形 $(a_0a_1\cdots a_k)$ 的点 a 为顶点的充要条件是，它不可能为 $(a_0a_1\cdots a_k)$ 中某两点所决定的线段的中点.

证明 先证必要性.

如果顶点 $a_s=\frac{1}{2}(v_1+v_2)$，这里

$$v_i=\lambda_0^{(i)}a_0+\cdots+\lambda_k^{(i)}a_k,\quad i=1,2,$$

那么由 $v_1\neq v_2$，知有指标 i,j 使 $i\neq j$，但 $\lambda_i^{(1)}>0,\lambda_j^{(2)}>0$. 因此

$$a_s=\frac{1}{2}(\lambda_0^{(1)}+\lambda_0^{(2)})a_0+\cdots+\frac{1}{2}(\lambda_k^{(1)}+\lambda_k^{(2)})a_k,$$

其中 $\frac{1}{2}(\lambda_i^{(1)}+\lambda_i^{(2)})>0,\frac{1}{2}(\lambda_j^{(1)}+\lambda_j^{(2)})>0$. 这与 a_s 的重心坐标为 $(\overbrace{0,\cdots,0}^{(s-1)},1,0,\cdots,0)$ 矛盾.

反过来，若点 $a=\lambda_0a_0+\cdots+\lambda_ka_k$ 不是 $(a_0a_1\cdots a_k)$ 的顶点，则它至少有两个分量不为 0. 假定 $\lambda_i>0$, $\lambda_j>0(i\neq j)$. 取正数 $\varepsilon<\min(\lambda_i,\lambda_j)$. 命

$$u_1=a+\varepsilon(a_i-a_j),$$

$$u_2=a-\varepsilon(a_i-a_j).$$

显然它们都属于 $(a_0a_1\cdots a_k)$，而

$$a=\frac{1}{2}(u_1+u_2),$$

即 a 为 $(a_0a_1\cdots a_k)$ 中由点 u_1 和 u_2 所决定的线段的中点. ◁

1.3 命题 如果单形 $A^k=(a_0a_1\cdots a_k)$ 和 $B^l=(b_0b_1\cdots b_l)$ 重合，那么它们的顶点经适当排列后也一一重合，特别 $k=l$. 换句话说，单形 A^k 唯一地决定它们的顶点.

证明 由于 $A^k = B^l$, 故 A^k 的顶点 $a_i \in B^l, i = 0, \cdots, k$. 但由 (1.2) 知 a_i 为 B^l 的顶点. 同样, B^l 的顶点也是 A^k 的顶点. 因此它们经适当排列后应一一重合. ◁

¡ 命题 (1.3) 的逆命题, 即: 顶点决定单形, 显然成立.

1.4 命题 单形 A^k 的边界点必属于某个真面. 反过来, 真面中的点必属于 $\dot{A}^k$.

证明 按定义, 边界点的重心坐标中, 至少有一个分量为 0. 设 $\lambda_i = 0$. 于是该点就属于真面 $(a_0 \cdots \overset{\wedge}{a_i} \cdots a_k)$[1]. 反过来, 结论显然. ◁

现在我们要用单形来拼出更复杂的图形 —— 复形, 以便把组合的方法引进来. 由于是 "拼", 所以单形和单形不应有重叠部分, 也就是讲, 它们只在表面 (边界) 处相遇. 又, 我们的着眼点是 "边界" 关系要 "一目了然", 因此当单形和单形沿它们的边界 (表面) 拼时, 这种公共的边界只能由它们的公共面组成. 所以我们有

1.5 定义 单形 A^k 和 B^l 叫做 **规则相处**, 如果交 $A^k \cap B^l$ 不是空集, 就是 A^k 和 B^l 的公共面.

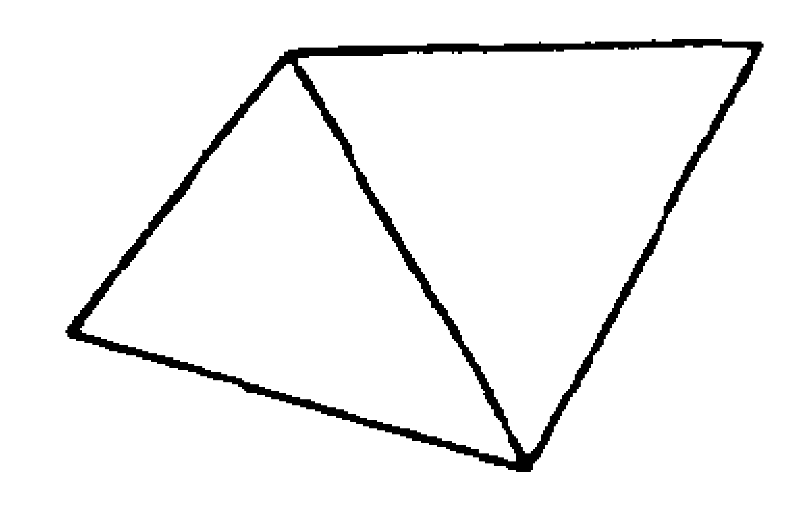
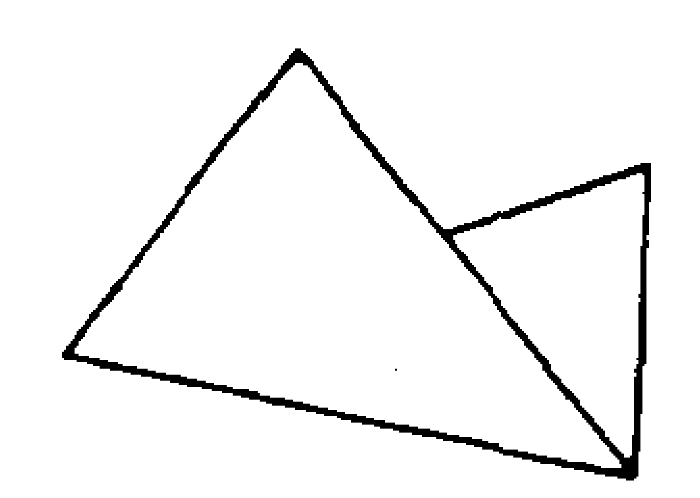
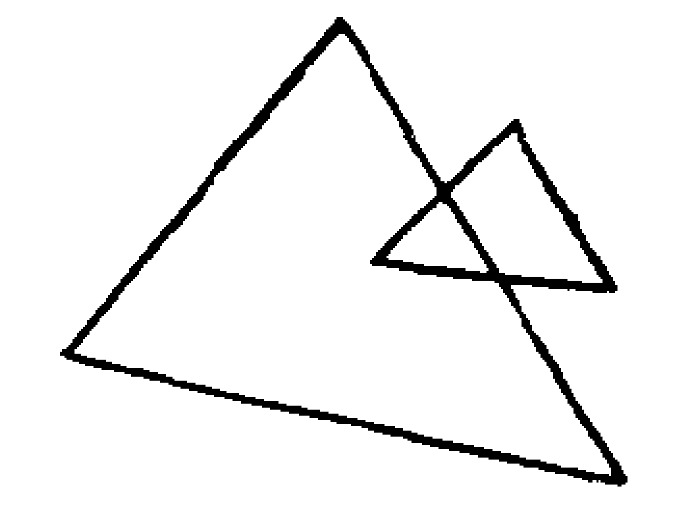




图 1.2

图 1.2 左图中的两个 2 维单形是规则相处的, 但右边两图却不是.

1) 这里 $(a_0 \cdots \overset{\wedge}{a_i} \cdots a_k)$ 表示 $(a_0 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_k)$, 即符号 $\wedge$ 下的 a_i 不出现. 以后将经常使用这种记号.

1.6 命题 如果 A^k 和 B^l 规则相处，而且交于公共面，那么该面由一个单形组成.

证明 假定 $a_0, a_1, \cdots, a_s$ 为它们的公共面的全部顶点，那么单形 $(a_0, a_1, \cdots, a_s)$ 既是 A^k 的面也是 B^l 的面. 所以是它们的公共面. 而它们除此以外没有别的交集，因而命题得证. ◁

由于有了这个命题，在规则相处的定义中，可将交于公共面进一步精确化为交于“一个”公共面.

1.7 命题 一个单形的任意两个面一定规则相处.

证明 设 A^k 和 B^l 是单形 C^s 的两个面. 若 A^k 的点由重心坐标

$$\lambda_{i_0} = \cdots = \lambda_{i_{s-k}} = 0 \tag{1}$$

刻画，而 B^l 的点由重心坐标

$$\mu_{j_0} = \cdots = \mu_{j_{s-l}} = 0 \tag{2}$$

刻画，那么它们的交集的点的重心坐标由方程组 (1), (2) 刻画. 这时 (1), (2) 若为一组矛盾方程 [1)]，则交集为空；若 (1), (2) 相容，则它们决定的仍是 C^s 的一个面. 故命题得证. ◁

有了以上的准备，现在我们来正式引进复形的概念.

1.8 定义 欧氏空间 E^n 中有限个单形所构成的集 K，叫做是一个 **复形**，如果下面的两个条件成立：

1) 若单形 A^k 属于 K，则 A^k 的任意一个面也属于 K；

2) K 的任意两个单形规则相处，即：它们或者不相交，或者交于一个公共面.

¡ 复形 K 是一组有限个单形的集合，而不是构成这些单形的点的集合，因此条件 1) 并不自动成立，即由 $A^k \in K, B^l < A^k$ 并不一定有 $B^l \in K$.

---

1) 注意，作为重心坐标，诸分量的和应为 1.

复形 K 的 0 维单形叫做是它的 **顶点**. 复形 K 中最高维单形的维数叫做 K 的 **维数**, 记为 $\dim K$.

1.9 定义 复形 K 在 E^n 中所占据的空间, 即 E^n 中由 K 的所有单形的全部点所构成的子空间, 叫做由 K 所决定的 **多面体**, 记为 $|K|$. 复形 K 叫做多面体 $|K|$ 的一个 **单纯剖分**. 简称 **剖分**.

1.10 例 由 (1.7), 知单形 A^k 的所有面构成一个复形, 在不会引起混淆时, 这个复形仍记为 A^k. 又 A^k 的所有真面也构成一个复形. 这里为方便计, 也记为 $\dot{A}^k$.

当然, 一个多面体可以有多种不同的单纯剖分存在 [1]. 我们的目的, 如引言中所说, 是寻求多面体的拓扑不变性质. 而复形只是我们找到这种不变量 —— 同调群的一个中间步骤, 即给多面体以一个组合结构.

1.11 命题 如果点 $x \in |K|$, 则 K 中含有 x 的最低维单形只有一个.

证明 若 K 中包含有点 x 的最低维单形不止一个, 例如单形 A 和 B 都包含 x, 即 $x \in A \cap B$. 由于 K 为复形, 故 $A \cap B = C$ 是它们的一个公共面. 于是 C 也是包含 x 的一个单形. 按假定, $A(B)$ 是包含 x 的最低维单形. 故 $C = A(C = B)$. 于是 $A = B$. $\triangleleft$

1.12 定义 上述复形 K 中包含点 x 的、唯一的最低维单形, 叫做是点 x(在 K 中) 的 **承载单形**, 记为 $\langle x \rangle_K$. 有时不强调 K, 略为 $\langle x \rangle$.

¡ 点 x 在它的承载单形中的重心坐标全为正, 也即点 x 是它的承载单形的内点. 反之亦真, 因此 $x \in \overset{\circ}{A}$ 的充要条件是 $A = \langle x \rangle$.

1.13 命题 多面体 $|K|$ 的点 x 属于单形 A^k 的充要条件是: x 的承载单形为 A^k 的面.

---

1) 这里, 不同的意思是指 "不同构", 读者请自行补出两个复形为同构的意义.

证明　显然.　◁

1.14　命题　一组有限个单形的集 K 为复形的充要条件是下述两条件成立:

1) 若单形 A^k 属于 K, 则 A^k 的任意一个面也属于 K;

2′) K 的任意两个开单形交于空集.

证明　如果 K 是复形，现在证 2′) 成立.

用反证法. 如果 $\mathring{A}^k \cap \mathring{B}^s \neq \emptyset$, 设 $x \in \mathring{A}^k \cap \mathring{B}^s$. 由 $x \in \mathring{A}^k$, 知 $\langle x \rangle = A^k$. 同样，$B^s = \langle x \rangle$, 故 $A^k = B^s$, 这和 A^k 与 B^s 为不同单形矛盾.

下面从 1), 2′) 成立，证复形定义中的条件 2) 也成立.

这时要证的是，如果单形 A^k 和 B^s 有公共部分，那么这个公共部分就是 A^k 和 B^s 的一个公共面.

任取 $x \in A^k \cap B^s$. 那么有 $A(B)$ 的面 $A'(B')$，使 $x \in \mathring{A}' \cap \mathring{B}'$. 于是由 2′), $A' = B'$. 故 A^k 有顶点属于 B^s.

命 $a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_l}$ 为 A^k 的属于 B^s 的顶点全体. 于是

$$x \in (a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_l}).$$

由于 x 任意，因此

$$A^k \cap B^s \subset (a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_l}).$$

反方向的包含关系是显然的，因为 $(a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_l})$ 既是 A^k 的面，也是 B^s 的面，因此

$$(a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_l}) \subset A^k \cap B^s.$$

这样

$$(a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_l}) = A^k \cap B^s.$$

即 A^k, B^s 交在一个公共面上.　◁

这个命题既为我们提供一个判别哪些单形组成一个复形的判据，又告诉我们，复形一方面可以看作是按一种边界关系明了的

方式，由单形拼成；另一方面，它也可以看成是，按一种边界关系分明的方式，被分解为一些开单形的并.

1.15　定义　复形 K 中的一部分单形所构成的集 L, 如果也是一个复形，则称 L 为 K 的 **子复形**. 这时也称 $|L|$ 为 $|K|$ 的 **子多面体**. 显然 K 中所有维数 $\leq l$ 的单形全体，构成 K 的一个子复形，叫做 K 的 l 维 **骨架**，记为 K^l.

¡　在子复形中，规则相处这个条件自动成立. 因此复形 K 的一部分单形能构成一个子复形 L, 只要满足唯一的一个条件：L 中单形的面也在 L 中.

由此立得以下的

1.16　命题　如果 $L_0,\cdots,L_t$ 是复形 K 的子复形，则它们的并及交也还是 K 的子复形. ◁

1.17　命题　对于复形 $K_1,\cdots,K_t$ 而言，如果 $|K_i|\cap|K_j|$ 是 K_i 和 K_j 的某个公共子复形所决定的多面体，$1\leq i,j\leq t$. 那么 $\bigcup\limits_i K_i$ 为复形. ◁

对于多面体和子多面体的拓扑，我们有下面的一些结论.

1.18　命题　1) 多面体 $|K|$ 是 E^n 中的有界闭集，因此是紧致集；

2) 多面体 $|K|$ 的子集 F 是闭集的充要条件为 $F\cap A^k$ 为 A^k 的闭集，这里 A^k 为 K 的任一单形.

证明　1) 如前所述，K 的每个单形是 E^n 中的有界闭集，而 K 的单形数有限，因此 $|K|$ 本身也是有界闭集.

2) 由于 K 中的单形 A^k 为 E^n 中的闭集，因此它也是 $|K|$ 中的闭集. 于是当 F 为 $|K|$ 中的闭集时，$F\cap A^k$ 为 $|K|$、也为 A^k 的闭子集. 反过来，若 $F_k=F\cap A^k$ 为 A^k 的闭集，则它也为 $|K|$ 的闭集. 现在

$$F=F\cap|K|=\cup F\cap A^k=\cup F_k.$$

故为 $|K|$ 的闭集. ◁

1.19　命题　若 L 为复形 K 的子复形，那么 $|L|$ 为 $|K|$ 的闭子集.

证明　因为 $|L| = \bigcup\limits_{A^k \in L} A^k$，而如前所述，每个 A^k 为 E^n、也为 $|K|$ 的闭子集，故 $|L|$ 为 $|K|$ 的闭子集. ◁

复形，按定义是由单形，即平直的图形拼成，因此，多面体的范围很狭窄. 例如球面就不是多面体. 可是我们已经讲了，复形只是我们在寻求多面体的拓扑不变量 —— 同调群的过程中的一步. 作为拓扑不变的同调群，它就对任一和有单纯剖分 K 的多面体 $|K|$ 同胚的空间也有意义. 因此这类空间不应另眼看待，我们给这种空间取一个名字.

1.20　定义　空间 X 叫做是 **可剖分的**，如果存在复形 K 和拓扑映射

$$t : |K| \to X.$$

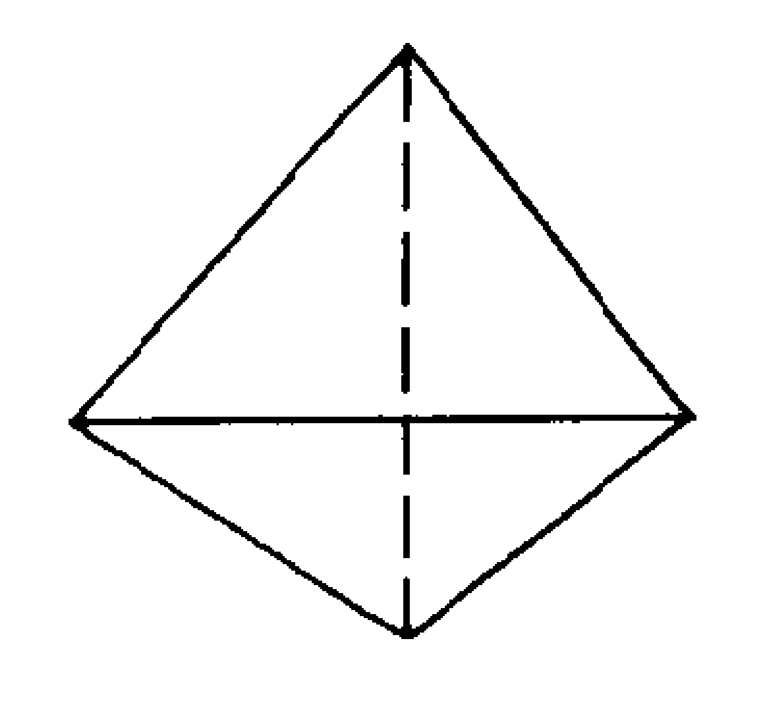
这里，称拓扑映射 t 和复形 K 的二元组 (t, K) 为空间 X 的一个**曲单纯剖分**. 有时为方便计，不特别指出 t.

当然，一个可剖分空间可以有许多种不同的曲单纯剖分. 可我们的目的，是通过它的众多的曲单纯剖分，决定出空间本身的拓扑不变量.

设 (t, K) 是可剖分空间 X 的一个曲单纯剖分. 那么对 K 的每个单形 A^k，我们有 X 的一个子空间 $t(A^k)$，称这种子空间为 X 的 **曲单形**. 于是 X 为这些曲单形 $t(A^k)$ 的并. 而这些曲单形构成 X 的一个曲剖分. 以后对于可剖分空间，有时只指出这些曲单形，而不将 t 和 K 点明. 例如，对于球面 S^2，我们有"**四面体曲剖分**"和"**八面体曲剖分**"，见图 1.3. (对于 n 维球面 S^n，也有相应的剖分)

1.21　命题　可剖分空间是紧致的、可度量化的空间.

证明　由于命题的断言是拓扑的，因此只要对多面体加以证明就可以了.



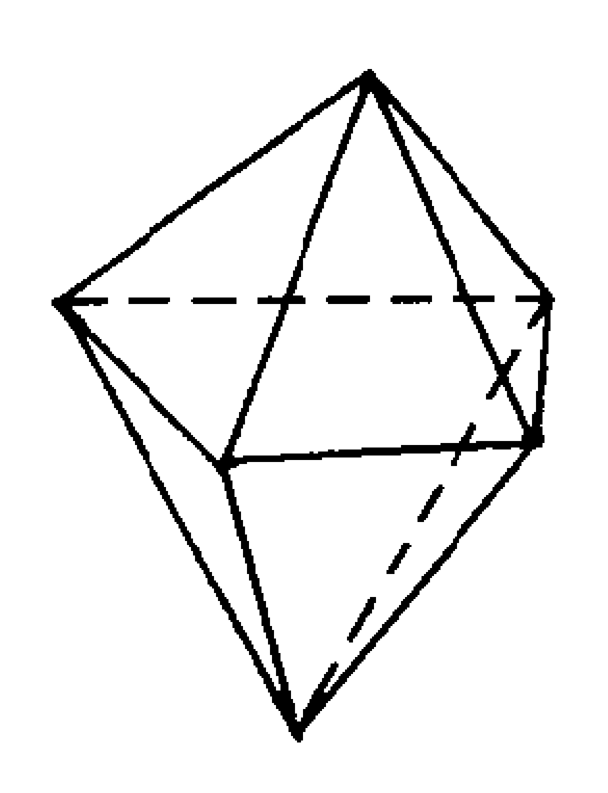


图 1.3

对于多面体 $|K|$, 它是紧致的已在 (1.18) 中证明. 至于它可度量化, 由它为 E^n 的子空间就可知道. ◁

¡ 1) 命题 (1.21) 告诉我们, 并不是所有的空间都是可剖分的. 不过, 所幸的是, 很多重要的空间是可剖分的.

2) (1.21) 的逆不成立. 请读者自己举例说明.

我们已经知道什么是复形, 而且也讲了, 我们将通过复形来介绍同调群. 但是为了介绍同调群, 先得把 "边界" 这个起决定性作用的几何概念严格地予以代数化.

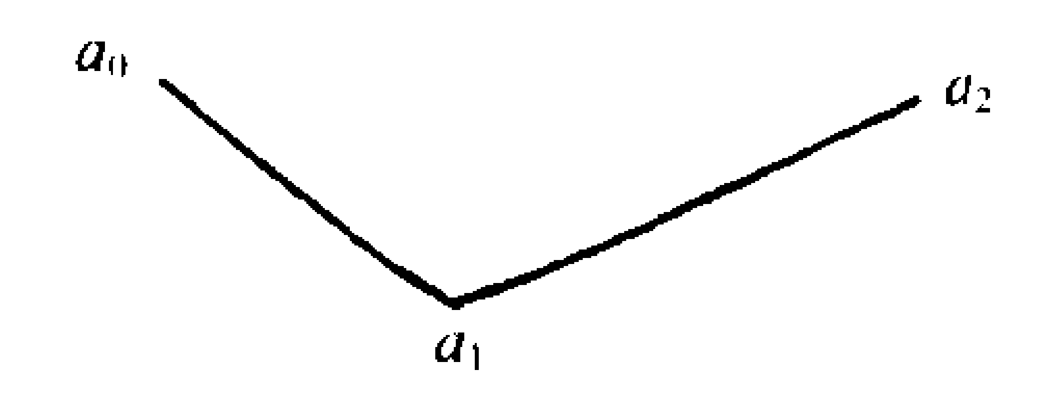
我们先来看一些简单的情形.

对于 1 维单形, 也就是线段, 它的边界是由它的两个端点构成, 如图 1.4 所示.



图 1.4

但如果有两个 1 维单形, 它们 "首尾相连"(规则相处) 成折线, 如图 1.5 所示.



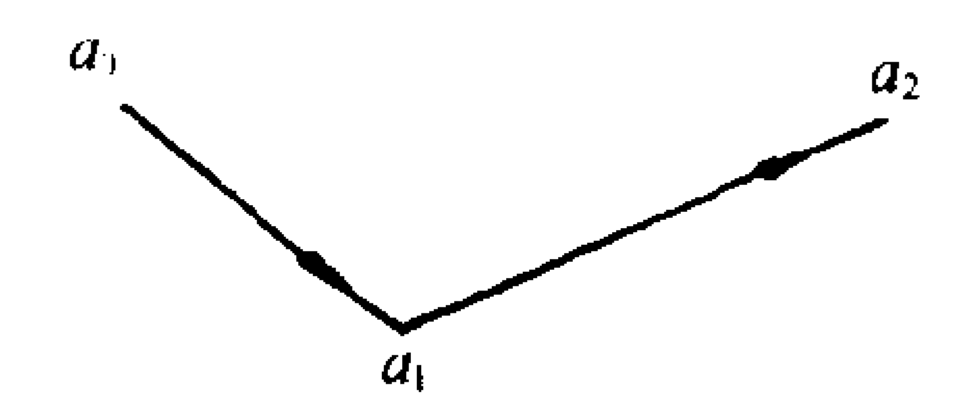


图 1.5

那么它们的边界当然也还是由两个端点构成. 但如何来精确的表达这一点呢? 对于单形 (a_0a_1) 来说, 它的边界是 a_0 和 a_1, 对于 (a_1a_2) 来说, 它的边界是 a_1 和 a_2. 但是对于作为整体的折线来说, a_1 不应再在边界出现. 为了使 a_1 不出现, 一个最自然的办法, 就是给 1 维单形以方向, 使 a_1, 比如说, 在 (a_1a_2) 中为首, 而在 (a_0a_1) 中为尾. 这样, 合起来"头尾抵消", 折线的端点就只剩下 a_0 和 a_2.

因此, 给单形以方向, 在描述边界时是自然的一步. 但是对于 1 维单形, 它的方向容易规定: 以 (a_0a_1) 为例, 它一共只有两个方向: 或者从 a_0 到 a_1, 记为 (a_0a_1), 对应的是向量 a_1-a_0, 或者从 a_1 到 a_0, 记为 (a_1a_0), 对应的是向量 a_0-a_1. 这样规定以后, a_1 在 (a_1a_2) 和 (a_0a_1) 的边界中, 分别以 a_1(首) 和 $-a_1$(尾) 的方式出现. 但对于高维的单形, 方向意味着什么呢? 我们还得做进一步的观察.

先观察 2 维的情形, 参见图 1.6.

对于 2 维单形 (三角形)$(a_0a_1a_2)$ 而言, 它的边界由它的三个边, 即三个 1 维单形 $(a_0a_1),(a_1a_2)$ 和 (a_2a_0) 构成.

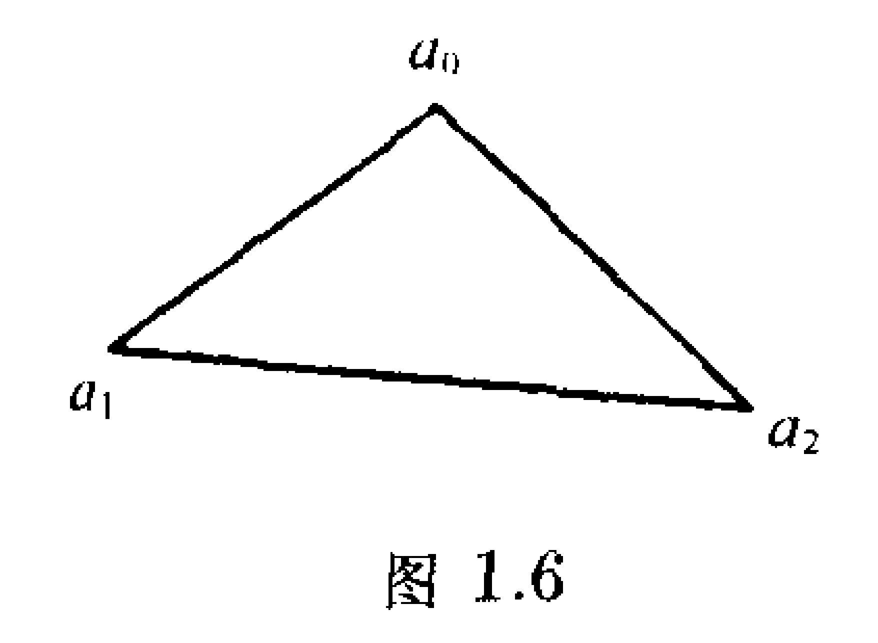
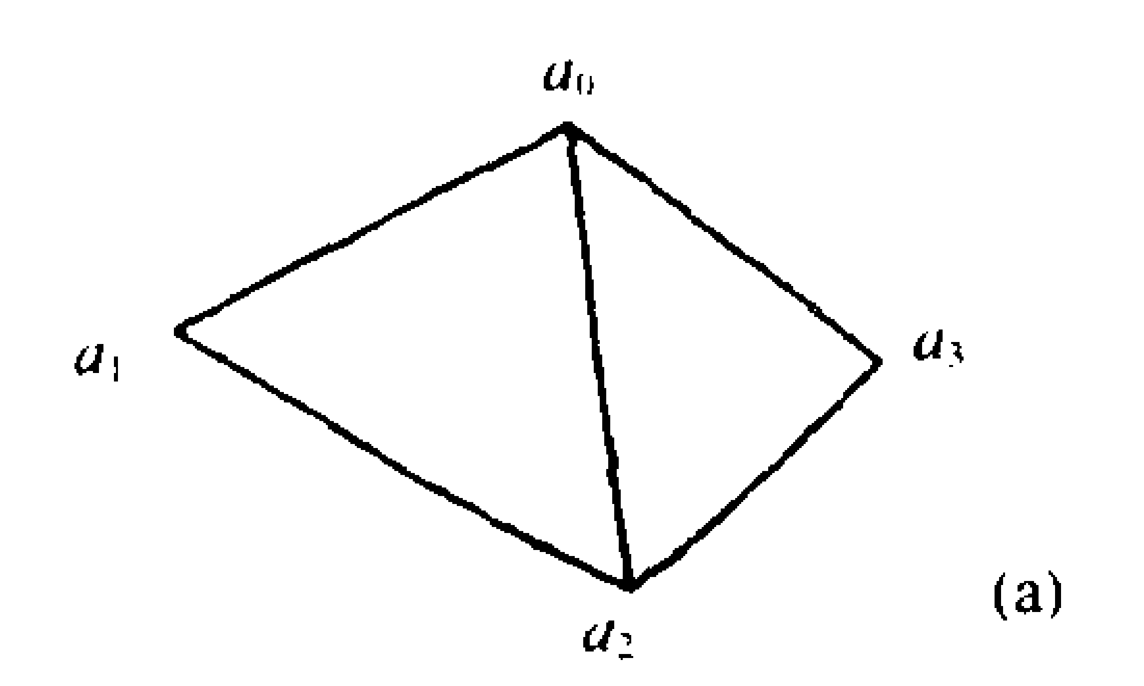


图 1.6

如果有两个 2 维单形, 它们规则相处, 如图 1.7(a) 所示. 那么, 它们的边界应该是由四个 1 维单形 $(a_0a_1),(a_1a_2),(a_2a_3)$ 和 (a_3a_0) 构成. 做为公共面的 (a_0a_2) 不出现. 怎样精确的表达这一点呢? 和上面讲的 1 维情形一样, 引进方向就可以了. 当然, 对于 2 维单形来讲, 它没有像 1 维单形那样, 可用箭头表示的方向, 但它有指向: 顺时针方向和逆时针方向. 如果我们对这两个 2 维单形 (三角形) 都取逆时针方向, 那么 $(a_0a_1a_2)$ 的边界



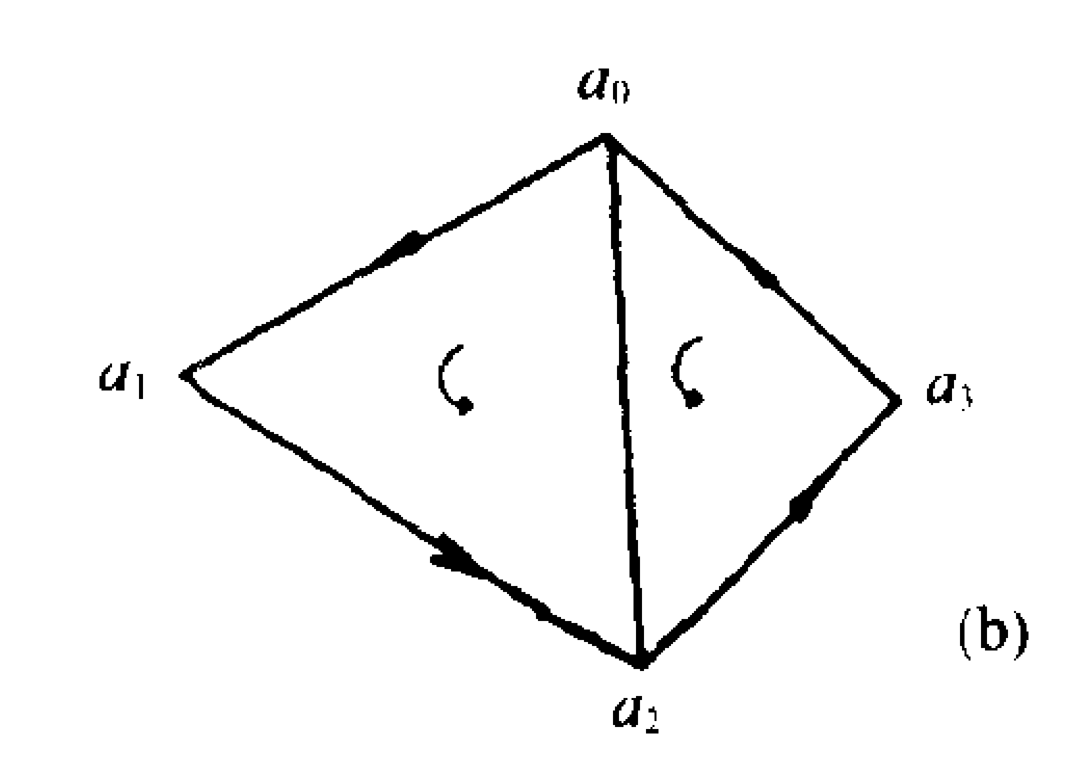


图 1.7

$(a_0a_1),(a_1a_2)$ 和 (a_2a_0) 有如图 1.7(b) 所示的方向. 同样，对于 $(a_0a_2a_3)$ 而言，其边界 $(a_0a_2),(a_2a_3)$ 和 (a_3a_0) 也有方向. 而公共边 (a_0a_2) 在 $(a_0a_1a_2)$ 和 $(a_0a_2a_3)$ 的边界上都出现，可方向相反，因而抵消. 这样，这两个带指向的、规则相处的 2 维单形，其边界由 $(a_0a_1),(a_1a_2),(a_2a_3)$ 和 (a_3a_0) 组成. 与我们预期的一致. 所以，这时引进指向就可以了.

对于 3 维单形 (四面体), 情形类似 (参见图 1.8), 这时我们有左螺旋和右螺旋两种指向. 选用这种带有指向的系统以后，可以使“公共面”的指向相反，从而抵消.

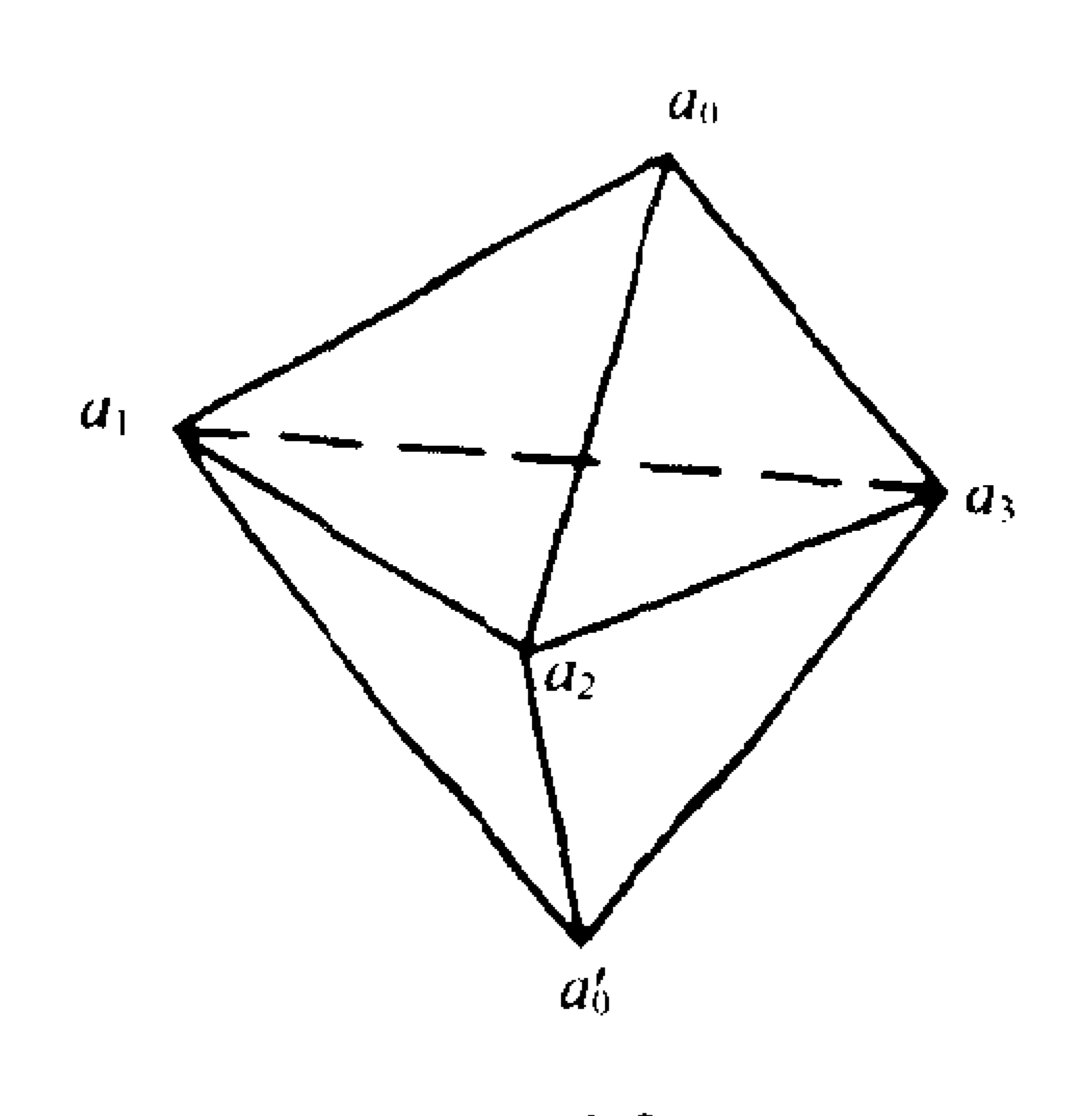


图 1.8

所以，我们需要对各个维数的单形，引进“指向 (方向)”概念. 它应该是箭头，顺时针或反时针，左螺旋或右螺旋等在高维的推广.

1 维单形 (a_0a_1) 的两个方向，可以用 (a_0a_1) 和 (a_1a_0) 表示.

2 维单形 $(a_0a_1a_2)$ 的两个指向 (顺时针和反时针) 可以用 $(a_0a_2a_1)$ 和 $(a_0a_1a_2)$ 表示. 不过， $(a_0a_2a_1)$ 和 $(a_2a_1a_0)$ 以及 $(a_1a_0a_2)$ 都是顺时针方向; 而 $(a_0a_1a_2)$ 和 $(a_1a_2a_0)$ 以及 $(a_2a_0a_1)$ 都是反时针方向. 那么同是顺 (反) 时针方向的三种写法之间有什么关系呢？经过观察，不难发现，它们彼此之间差一个偶置换. 而表示不同指向的写法间，彼此差一个奇置换，而这些不同的写法，为 a_0,a_1,a_2 的全部排列.

同样，对 3 维单形 $(a_0a_1a_2a_3)$ 的左、右螺旋. 它们也有类似的规律： a_0,a_1,a_2,a_3 的全部排列可以分成两组，同一组中的排列彼此差一个偶置换，不同组之间的排列，彼此差一个奇置换.

一般，对于 n 维单形 $(a_0a_1\cdots a_n)$ 的顶点，它们的全部排列也可以分为两组，同一组中的排列彼此差一个偶置换，不同组之间的排列，彼此差一个奇置换.

和低维的情形类似，选定这两个组中的一个组，我们便给单形 $(a_0a_1\cdots a_n)$ 规定了一个 **指向**.

1.22　定义　选定指向的单形叫做 **有向单形**.

假设选定单形 A^k 的指向由它的顶点排列 $a_0,\cdots,a_k$ 所在的组决定. 那么将该有向单形记为 σ^k 或 $+(a_0a_1\cdots a_k)$. 具有相反指向，即选定另一个组的有向单形记为 $-\sigma^k$ 或 $-(a_0a_1\cdots a_k)$. 于是 $+(a_0a_1\cdots a_k)$ 和 $-(a_1a_0a_2\cdots a_k)$ 实际上是代表同一有向单形 σ^k.

¡　记号 $(a_0a_1\cdots a_k)$ 表示单形， $+(a_0a_1\cdots a_k)$ 表示有向单形，它们不会混淆. 不过，在不致引起误会的前提下，有时我们也用 $(a_0a_1\cdots a_k)$ 来表示有向单形 $+(a_0a_1\cdots a_k)$.

0 维单形 a_0 的顶点只有一个排列法. 为了一致起见，我们也赋予它符号 $+$ 或 $-$. 于是它也有两个指向. 这时的两个 0 维有向单形分别记为 $+a_0$ 和 $-a_0$.

1.23 定义 设 K 为 n 维复形,

$$\{A_i^k | i = 1, \cdots, \varphi_k, k = 0, 1, \cdots, n\}$$

是它的全部单形. 对每个单形 A_i^k 取定一个指向, 这个有向单形记为 σ_i^k (于是, 另一个指向决定的有向单形就是 $-\sigma_i^k$). 称

$$\{\sigma_i^k | i = 1, \cdots, \varphi_k\}$$

为 K 的一个 k 维 **基本组**, $k = 0, 1, \cdots, n$.

形式和

$$x^k = \sum_{i=1}^{\varphi_k} \alpha_i \sigma_i^k, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \cdots, \varphi_k \tag{3}$$

叫做是 K 的一个 k 维 **链**(简称 k 链). 链 (3) 和同维链

$$y^k = \sum_{i=1}^{\varphi_k} \beta_i \sigma_i^k$$

的和定义为链

$$x^k + y^k = \sum_{i=1}^{\varphi_k} (\alpha_i + \beta_i) \sigma_i^k.$$

显然, 在这个加法运算下, k 链全体构成一个自由可换群, 记为 $C_k(K)$. 叫做 K 的 k 维 (整数)**链群**.

i 链 $x^k = \sum_i \alpha_i \sigma_i^k$ 可以这么看: 它是 α_i 个有向单形 σ_i^k 的和. 如果坚持个数只能为正, 那么约定

$$\alpha_i \sigma_i^k = (-\alpha_i)(-\sigma_i^k),$$

项 $\alpha_i \sigma_i^k$ 在 $\alpha_i < 0$ 可解释为 $(-\alpha_i)(> 0)$ 个 $(-\sigma_i^k)$. 这个约定将一直使用.

相应于 $\alpha_i=1,\alpha_j=0(j\neq i)$ 的链 $1\cdot\sigma_i^k$, 我们可以将其直接视为有向单形 σ_i^k. 在这样的看法下, $\sigma_1^k,\cdots,\sigma_{\varphi_k}^k$ 就构成 $C_k(K)$ 的一组基. 以后如无特别声明, 谈到 $C_k(K)$ 的基, 总是指由基本组构成的这个基. 由此可知, 链群不依赖于 K 的 k 维基本组 $\{\sigma_i^k\}$ 的选取, 即选用不同的基本组, 它们决定的链群彼此同构.

1.24 定义 链 $\alpha_i\sigma_i^k(\alpha_i\neq 0)$ 的 **承载复形** (**承载体**) 为复形 A_i^k(多面体 $|A_i^k|$). 一般的, 链 $x^k=\sum\limits_i\alpha_i\sigma_i^k$ 的承载复形是它的诸非 0 项的承载复形的并, 而 x^k 的承载体就是它的承载复形所决定的多面体.

¡ 链 x^k 可以看作是它的承载复形的一个链, 而且承载复形是 K 中具有这个性质的最小子复形.

至此, 我们已经将图形用“链”这种代数方式予以描述. 那么边界关系如何反映呢? 也即如何在相邻维数的链之间建立一种反映边界关系的代数运算呢? 由于链属于链群, 所以这种代数运算当然是群间的同态. 不过, 链群由基本组生成. 所以我们只要对有向单形定义它的值就可以了.

设 $\varepsilon(a_0a_1\cdots a_k)$ 为有向单形 ($\varepsilon=+1$ 或 -1). 命

$$\partial_k(\varepsilon(a_0a_1\cdots a_k))=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\varepsilon(a_0\cdots\overset{\wedge}{a_i}\cdots a_k)),\qquad(4)$$

于是我们有 **边缘同态**

$$\partial_k:C_k(K)\to C_{k-1}(K).$$

¡ 在 (4) 中, 必要时用约定 $\alpha\sigma=(-\alpha)(-\sigma)$. 就很容易知道, ∂_k 与有向单形的记法无关.

¡ 边缘同态 ∂_k 的低维情况

$$\partial_0(a_0)=0,$$

$$\partial_1(a_0a_1)=a_1-a_0,$$

$$\partial_2(a_0a_1a_2) = (a_1a_2) - (a_0a_2) + (a_0a_1),$$

$$\partial_3(a_0a_1a_2a_3) = (a_1a_2a_3) - (a_0a_2a_3) + (a_0a_1a_3) - (a_0a_1a_2)$$

可以图示如下：

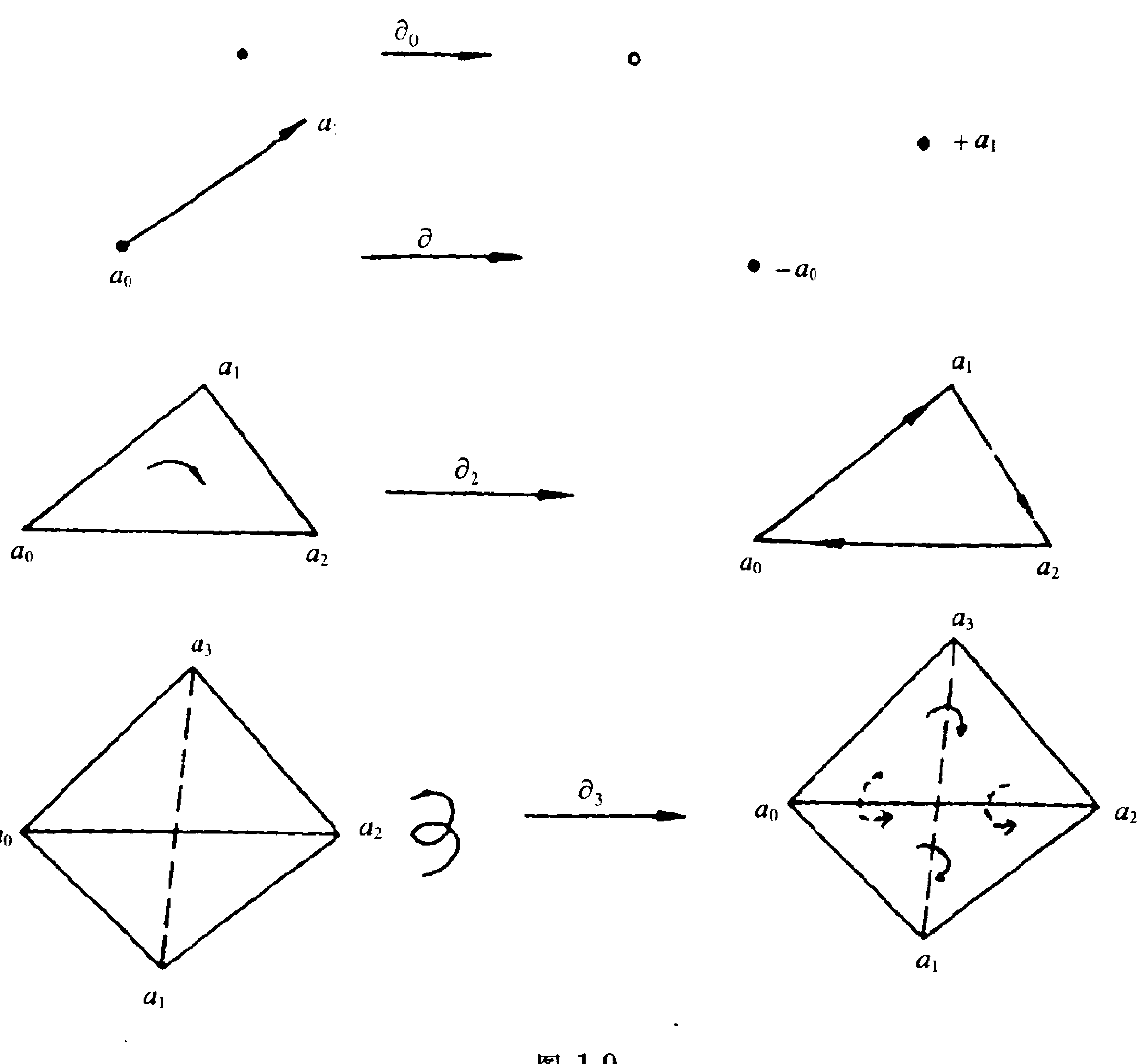


图 1.9

由此可见，它们就是几何上边界概念的代数化.

关系式 (4) 也可改写为

$$\partial_k \sigma_i^k = \sum_{j=0}^{\varphi_{k-1}} [\sigma_i^k : \sigma_j^{k-1}] \sigma_j^{k-1}.$$

1.25 定义 对于有向单形σ_i^k和σ_j^{k-1}来说，上式中的 $[\sigma_i^k : \sigma_j^{k-1}]$ 叫做它们的 **关联数**，简记为 α_{ij}^k. 矩阵 $(\alpha_{ij}^k)_{1\leq i\leq\varphi_k, 1\leq j\leq\varphi_{k-1}}$, $k =$

$1, \cdots, \dim K$, 叫做 K 的第 k 个 **关联矩阵**. 简记为 (∂_k).

好了, 现在我们既有了描述图形的"链", 又有了反映边界关系的边缘同态. 我们就可以考虑一开始所说的, 利用边界关系这个拓扑不变量的任务了.

如果一个图形是另一个图形的边, 那么经拓扑变换后, 它的像还是边. 因此, 从拓扑的角度讲, 一个图形如果是边的话, 它的意义就不大了. 拓扑学应该关心那些不是边的图形, 这是一方面. 另一方面, 因为我们是从边的角度出发来考虑问题, 因此一个根本不可能成为边的图形, 对于我们来讲也没有意义. **所以从拓扑的角度讲, 关心那些有可能成为边, 但又不真是边的图形** 才是合适的.

我们已经会描述真是边的图形了. 它们不是别的, 恰为 Im $(\partial_{k+1} : C_{k+1}(K) \to C_k(K))$. 那么, 如何描写有可能成为边的图形呢? 显然, 这是要为能成为边的图形找一个必要条件. 由于我们是从边界这个观念来处理问题的. 因此, 这个必要条件也应该用边界来描述才合适.

从几何直观上可以知道, 如果一个图形是另一个图形的边, 那么它本身应该没有边. 不过直观是一个"可以意会, 不可言传"、全凭想象的能力. 它并不严格.

所幸的是, 我们有反映边界关系的边缘同态 ∂_k 在. 而"是边的图形本身没有边", 可以用

$$\partial_k \partial_{k+1} = 0$$

来描述. 这样, 有可能成为边的图形都在 Ker$(\partial_k : C_k(K) \to C_{k-1}(K))$ 中.

我们现在就来证明.

1.26 引理 对于边缘同态来讲, 有

$$\partial_k \partial_{k+1} = 0, \quad k \geq 0.$$

证明 这时只要就基本组的元 $\sigma_i^{k+1}=\varepsilon(a_0\cdots a_{k+1})$ ($\varepsilon=\pm1$) 验证即可. 由于 $\partial_0=0$, 故只需考虑 $k\geq 1$.

$$
\begin{aligned}
&\partial_k\partial_{k+1}(\varepsilon(a_0\cdots a_{k+1}))\\
&=\partial_k\left(\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\varepsilon(a_0\cdots \hat{a}_i\cdots a_{k+1})\right)\\
&=\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\varepsilon\left\{\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(a_0\cdots\hat{a}_j\cdots\hat{a}_i\cdots a_{k+1})\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{j=i+1}^{k+1}(-1)^{j-1}(a_0\cdots\hat{a}_i\cdots\hat{a}_j\cdots a_{k+1})\right\}\\
&=\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{i+j}\varepsilon\sum_{j=0}^{i-1}(a_0\cdots\hat{a}_j\cdots\hat{a}_i\cdots a_{k+1})\\
&\qquad+\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{i+j-1}\varepsilon\sum_{j=i+1}^{k+1}(a_0\cdots\hat{a}_i\cdots\hat{a}_j\cdots a_{k+1})\\
&=\sum_{i>j}(-1)^{i+j}\varepsilon(a_0\cdots\hat{a}_j\cdots\hat{a}_i\cdots a_{k+1})\\
&\qquad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j-1}\varepsilon(a_0\cdots\hat{a}_i\cdots\hat{a}_j\cdots a_{k+1})\\
&=\sum_{l>m}(-1)^{l+m}\varepsilon(a_0\cdots\hat{a}_m\cdots\hat{a}_l\cdots a_{k+1})\\
&\qquad+\sum_{l>m}(-1)^{l+m-1}\varepsilon(a_0\cdots\hat{a}_m\cdots\hat{a}_l\cdots a_{k+1})\\
&=0.
\end{aligned}
$$

◁

1.27 推论 对于关联矩阵来说, 我们有

$$(\partial_{k+1})(\partial_k)=0,\quad k\geq 0.$$

证明 矩阵 $(\partial_{k+1})(\partial_k)$ 的第 i 行, 第 j 列元素恰好是 σ_j^{k-1} 在 $\partial_k\partial_{k+1}\sigma_i^{k+1}$ 中的系数, 故为 0. ◁

现在我们将反映“图形”、“边界”关系和“是边的图形本身没有边”的这些事实，总结为

1.28　定义　n 维复形 K 的 **有向链复形**(也称 **单纯链复形**, 简称 **链复形**) $C_*(K)$ 是指如下的序列:

$$\cdots \to 0 \to C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \to \cdots \to C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

其中 $\partial_k\partial_{k+1} = 0, k \geq 0$.

1.29　定义　复形 K 的 k 维 **闭链群** 和 **边缘链群** 依次为

$$Z_k(K) = \mathrm{Ker}\partial_k = \{z^k| \in C_k(K), \partial_k z^k = 0\},$$

$$B_k(K) = \mathrm{Im}\partial_{k+1} = \{b^k| \in C_k(K),\ 有x^{k+1}使\partial_{k+1}x^{k+1} = b^k\}.$$

$Z_k(K)$ 的元 z^k 叫做 k 维 **闭链**, $B_k(K)$ 的元 b^k 叫做 k 维 **边缘链**.

由 (1.26), 我们有

$$B_k(K) \subset Z_k(K).$$

而且作为自由群 $C_k(K)$ 的子群，它们也都是自由的.

既然有可能成为边的图形由 $Z_k(K)$ 描述, 而真的是边的图形由 $B_k(K)$ 描述，那么“有可能成为边，又不真是边”这一事实，用群论的语言来表达，就应该是：在有可能成为边的 $Z_k(K)$ 中，模真是边的部分 $B_k(K)$. 这样我们就有

1.30　定义　商群

$$H_k(K) = Z_k(K)/B_k(K) = \mathrm{Ker}\partial_k/\mathrm{Im}\partial_{k+1}$$

叫做复形 K 的 k 维 **同调群**.

这样，同调群 $H_k(K)$ 中的元为 $Z_k(K)$ 模 $B_k(K)$ 的等价类 $[z^k]$, 称为 K 的 k 维 **同调类**. 同一同调类中的元 z_1^k 和 z_2^k 称为 **同调的**, 记作 $z_1^k \sim z_2^k$. 特别， $B_k(K)$ 中的元 b^k 同调于 $0 : b^k \sim 0$.

¡ 由 $\partial_0=0$ 知 $Z_0(K)=C_0(K)$, 又当 $\dim K=n$ 时, $C_{n+1}(K)=0$, 故 $B_n(K)=0$; 于是 $H_n(K)=Z_n(K)$ 是自由交换群. 又 $H_k(K)=0, k<0$ 或 $k>n$.

1.31 命题 设 k 维闭链 x_i^k 为同调类 $[x_i^k]$ 的代表, $i=1,\cdots,m$. 又 α_i 为整数. 那么等式

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i[x_i^k]=0$$

成立的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i^k\sim 0.$$

证明 这由商群的定义即知. ◁

1.32 命题 边缘同态 ∂_k 导出同构

$$C_k(K)/Z_k(K)\cong B_{k-1}(K).$$

证明 注意 $B_{k-1}(K)=\mathrm{Im}\partial_k$, 故由群论的第一同构定理即知. ◁

至此, 我们将引言中所阐述的几何直观描写, 完全用严格的数学语言予以表达. 因此, 同调群的拓扑不变性是可以期待的. 一旦我们证明了同调群的拓扑不变性以后, 就可以对可剖分空间定义同调群了. 也正因为这个原因, 下面我们在计算可剖分空间的同调群时, 只通过它的某一个确定的曲单纯剖分来进行. 读者完全可以通过其它的剖分来计算这些同调群. 实际上, 这样做是很好的练习.

§2. 一些例

2.1 例 单点复形 P.

这是由一个顶点 P 构成的复形.

显然，$C_0(P)=\mathbb{Z}, C_k(P)=0, k>0$. 于是

$$H_k(P)=\begin{cases}0, & k>0,\\ \mathbb{Z}, & k=0.\end{cases}$$

2.2　例　二维实心球 E^2.

显然 E^2 是一个可剖分空间. 实际上，它和 $|K|$ 同胚，这里 K 是由 2 单形 $(a_0a_1a_2)$ 及其所有面所构成的复形.

以 a_0, a_1, a_2 这样的全序来对 K 的每个单形规定指向 (见图 1.10)，则它的基本组为 $\{+a_0, +a_1, +a_2\}$，$\{+(a_0a_1), +(a_1a_2), +(a_0a_2)\}$ 和 $\{+(a_0a_1a_2)\}$. 一般可用 K 的序来为 K 的单形规定指向. 所谓 K 的序是指 K 的顶点集 K^0 的这样一个偏序：它在 K 的每个单形的顶点集上导出一个全序.

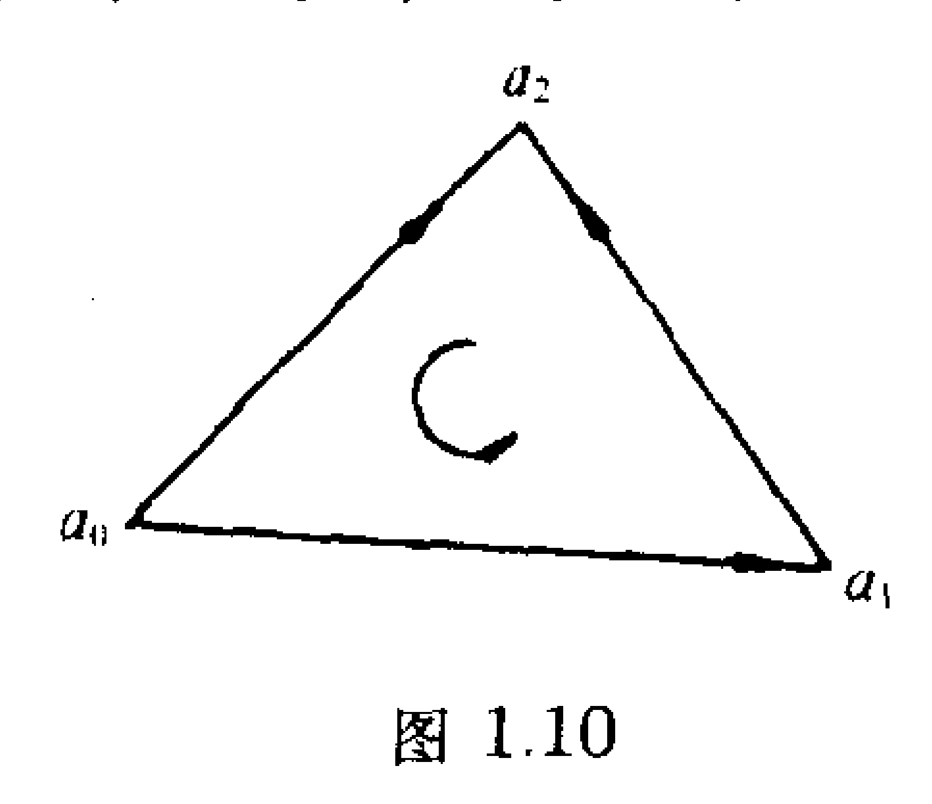


图 1.10

复形 K 的 0 维链为

$$x^0=\alpha_0a_0+\alpha_1a_1+\alpha_2a_2,$$

这里 $\alpha_i\in\mathbb{Z}, i=0,1,2$. 故 $C_0(K)\cong Z_0(K)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

复形 K 的 1 维链为

$$x^1=\beta_0(a_0a_1)+\beta_1(a_1a_2)+\beta_2(a_0a_2),$$

这里 $\beta_i\in\mathbb{Z}, i=0,1,2$. 故 $C_1(K)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

复形 K 的 2 维链为

$$x^2=r(a_0a_1a_2),\quad r\in\mathbb{Z}.$$

故 $C_2(K) \cong \mathbb{Z}$. 由于

$$\partial x^2 = r(a_1a_2) - r(a_0a_2) + r(a_0a_1),$$

故若 $\partial x^2 = 0$, 必有 $r = 0$. 于是 $Z_2(K) = 0$. 这样 $H_2(K) = 0$.

为了计算 $H_1(K)$, 设

$$x^1 = \beta_0(a_0a_1) + \beta_1(a_1a_2) + \beta_2(a_0a_2)$$

为任一 1 维闭链. 那么我们有

$$x^1 \sim \overline{x}^1 = x^1 + \partial(-\beta_1(a_0a_1a_2))$$

$$= (\beta_0 - \beta_1)(a_0a_1) + (\beta_1 + \beta_2)(a_0a_2).$$

注意. 现在 $\overline{x}^1$ 中只有一项含顶点 $a_1(a_2)$, 故由

$$\partial\overline{x}^1 = 0,$$

知 $a_1(a_2)$ 的系数 $\beta_0 - \beta_1 = 0(\beta_1 + \beta_2 = 0)$, 故 $\overline{x}^1 = 0$. 于是 $x^1 \sim 0$. 这样每个 1 维闭链 x^1 都同调于 0, 所以 $H_1(K) = 0$.

最后来计算 $H_0(K)$.

注意

$$\partial(a_0a_i) = a_i - a_0, \quad i = 1, 2.$$

故 $a_i \sim a_0$. 这也就是说, K 的 0 维 (闭) 链

$$x^0 = \alpha_0a_0 + \alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 \sim (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)a_0, \qquad (1)$$

而 $\alpha a_0 \sim 0$ 的充要条件, 显然是 $\alpha = 0$. 故 $H_0(K) = \mathbb{Z}$.

¡ 在 $H_0(K) = \mathbb{Z}$ 的证明中, $a_i \sim a_0$ 起关键作用. 有了它, (1) 才成立.

¡ 在 (1) 中, $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ 是 x^0 的各项系数的和. 这个数决定了 x^0 的同调类. 所以有其特殊意义. 因此我们对任一复形

K, 定义同态

$$\begin{aligned} \varepsilon^K: \ C_0(K) &\to \mathbb{Z} \\ +a &\mapsto 1 \end{aligned} \tag{2}$$

并称之为 **增广同态**. 在不会引起混淆时, 简记为 ε.

2.3 命题 增广同态 ε 具有性质: $\varepsilon\partial_1 = 0$.

证明 直接验算即可. ◁

这样, 实心球 E^2 的同调群为

$$H_0(E^2) = \mathbb{Z},$$

$$H_i(E^2) = 0, \quad i \neq 0.$$

2.4 例 n 维实心球 E^n.

这时 E^n 有一个曲单纯剖分 A^n, 即由 n 维单形 $A^n = (a_0a_1\cdots a_n)$ 及其全体面所构成的复形.

现在来考虑 $H_k(E^n), k \geq 1$.

设 z^k 是一个 k 维闭链, 若 z^k 中有一项

$$\alpha(a_{i_0}\cdots a_{i_k}),$$

它不含顶点 a_0, 那么可以用含有顶点 a_0 的项来"代替"这一项. 实际上,

$$\overline{z}^k = z^k - \partial(\alpha(a_0a_{i_0}\cdots a_{i_k}))$$

就具有这个性质, 而 $z^k \sim \overline{z}^k$, 它们代表同一个同调类, 因此可用 $\overline{z}^k$ 来代替 z^k.

在对所有的不含 a_0 的项都如此处理以后, 不妨假设 $[z^k]$ 的代表 z^k 中的每一项均含有顶点 a_0. 设

$$\alpha(a_0a_{j_1}\cdots a_{j_k})$$

为其中的一项. 那么在 ∂z^k 中有

$$\partial(\alpha(a_0a_{j_1}\cdots a_{j_k})) = \alpha(a_{j_1}\cdots a_{j_k}) + \cdots$$

(其中未写出的项均含有顶点 a_0) 出现. 但在 ∂z^k 中, 不再有别的项包含有有向单形 $(a_{j_1}\cdots a_{j_k})$. 因此由 $\partial z^k=0$, 知 $\alpha=0$. 这样 z^k 的每一项的系数均为 0, 故 $z^k=0$. 所以

$$H_k(E^n)=0,\quad k\geq 1.$$

¡ 在这里, 和上例用的手法类似, 这就是: 将一般的 k 维闭链 z^k, 用一个特殊的闭链来替换, 这个闭链的特点就是它的每一非 0 项的有向单形都含有一个特定的顶点 a_0.

再来计算 $H_0(E^n)$.

实际上, 和上例 $(n=2)$ 一样. 这里仍有

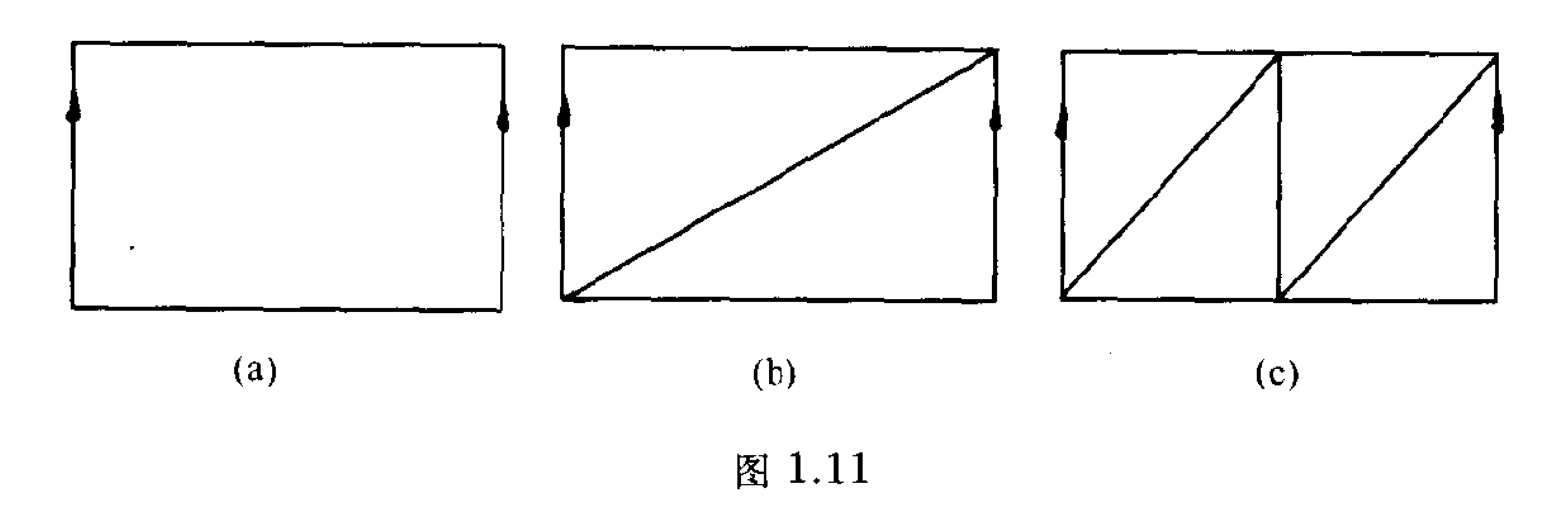
$$a_0\sim a_i,\quad i=1,\cdots,n,$$

成立. 因此

$$H_0(E^n)=\mathbb{Z}.$$

2.5 例 柱面

柱面是由叠合图 1.11(a) 中长方形的两条垂直边而得到.



(a) (b) (c)

图 1.11

图 1.11(b) 和图 1.11(c) 都不是柱面的 (曲) 单纯剖分. 实际上, 它们虽然都满足条件: 任意两个单形或者不相交, 或者交于公共面. 但是我们知道, 交于公共面的条件应该精确为交于一个公共面 (1.6). 可这一条不满足, 因此不论是图 1.11(b) 还是图 1.11(c), 都不构成柱面的 (曲) 单纯剖分.

下面的图 1.12 标出了柱面的一个 (曲) 单纯剖分 K. 这时 K 有 6 个顶点， 12 条棱和 6 个三角形. 箭头给出了有向单形的一个基本组 $\{\sigma_i^k\}$.

先计算 $H_2(K)$.

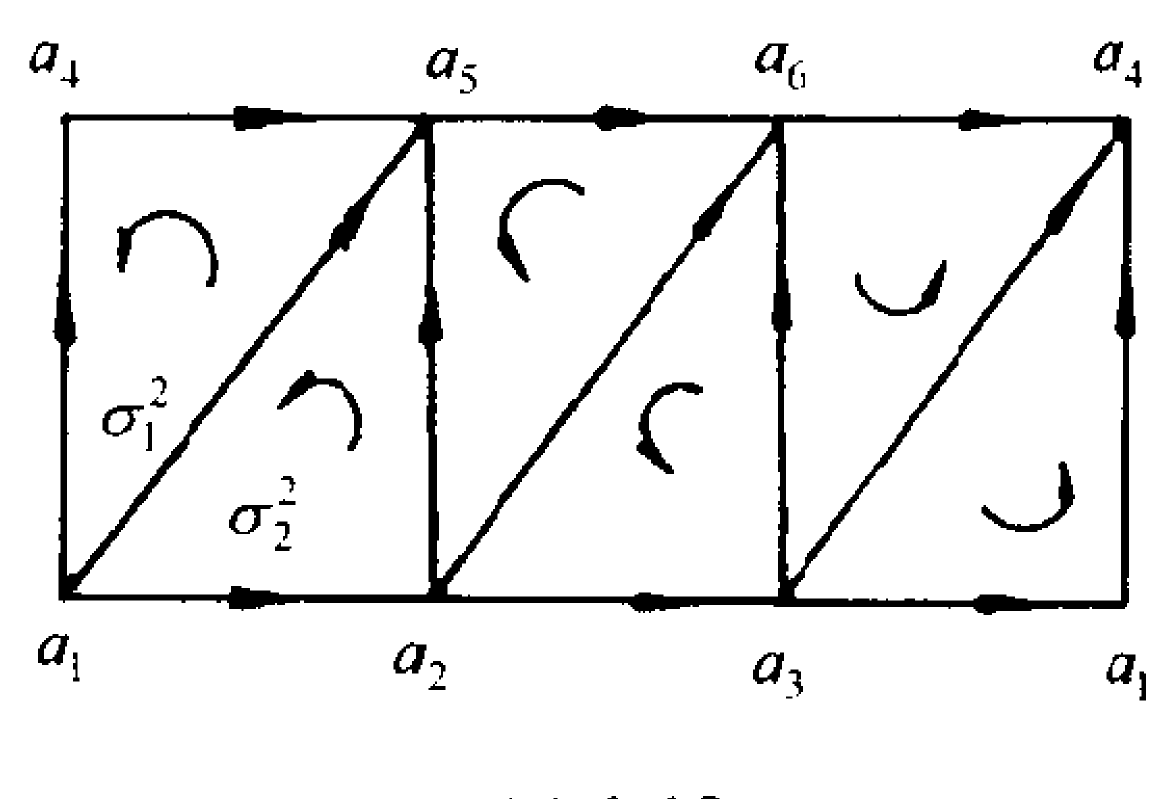


图 1.12

设 $z^2 \in Z_2(K)$. 则将 ∂z^2 视为 σ_i^1 的形式和以后，$\partial z^2 = 0$ 表示每一个 σ_i^1 的系数是 0. 现设 2 维有向单形 σ_i^2, 例如 $+(a_1a_5a_4)$, 在 z^2 中出现 α_i 次. 因为

$$\partial\alpha_i(a_1a_5a_4) = \alpha_i(a_5a_4) + \cdots = -\alpha_i(a_4a_5) + \cdots,$$

而 K 中，除 $(a_1a_5a_4)$ 外，再没有以 (a_4a_5) 为边的 2 维有向单形存在. 因此由 $\partial z^2 = 0$ 推出 $\alpha_i = 0$. 同样，对其它的 2 维有向单形进行类似的讨论，知它们在闭链 z^2 中的系数均为 0, 于是 $z^2 = 0$, 即 $Z_2(K) = 0$, 这样 $H_2(K) = 0$.

再考虑 $H_1(K)$.

首先，

$$z^1 = (a_1a_2) + (a_2a_3) + (a_3a_1)$$

和

$$\tilde{z}^1 = (a_4a_5) + (a_5a_6) + (a_6a_4)$$

都是 1 维闭链. 又由

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{6}\sigma_i^2\right) = (a_1a_2) + (a_2a_3)$$
$$+(a_3a_1) - ((a_4a_5) + (a_5a_6) + (a_6a_1)),$$

知 $z^1 \sim \tilde{z}^1$, 即 z^1 和 $\tilde{z}^1$ 属于同一个同调类.

1) 可以证明, 如果 $\overline{z}^1 \in Z_1(K)$, 那么有 $\beta \in \mathbb{Z}$ 使 $\overline{z}^1 \sim \beta z^1$.

实际上, 设有向的"对角"棱 (a_1a_5) 在 $\overline{z}^1$ 中出现 γ 次. 则由 $\overline{z}^1 \sim \overline{z}^1 + \partial\gamma(a_1a_2a_5)$, 及 (a_1a_5) 不在 $\overline{z}^1 + \partial\gamma(a_1a_2a_5)$ 中出现. 因此不妨设 $\overline{z}^1$ 中不含 (a_1a_5). 同理, 可设 $\overline{z}^1$ 中也不含 $(a_2a_6),(a_3a_4)$, 即所有的"对角棱"均不出现. 设 (a_4a_5) 在 $\overline{z}^1$ 中出现 β' 次, 那么由 $\overline{z}^1 \sim \overline{z}^1 + \partial\beta'\ [(a_1a_5a_4) + (a_1a_2a_5)]$ 及 (a_4a_5) 不在 $\overline{z}^1 + \partial\beta'[(a_1a_5a_4) + (a_1a_2a_5)]$ 中出现, 因此在不改变同调类的前提下, 不妨设 (a_4a_5) 不在 $\overline{z}^1$ 中出现. 同样办法, 可设 $(a_5a_6),(a_6a_4)$, 即"顶端"的 1 维有向单形均不出现在 $\overline{z}^1$ 中. 于是 $\overline{z}^1$ 只是 $(a_1a_2),(a_2a_3),(a_3a_1),(a_2a_5),(a_3a_6)$ 和 (a_1a_4) 的形式和. 但后面三种"垂直"类型的 1 维有向单形实际上也不出现. 例如, 若 (a_2a_5) 在 $\overline{z}^1$ 中出现 δ 次, 则由

$$\partial\overline{z}^1 = \delta a_5 + \cdots = 0,$$

及"$\cdots$"中不再含有 a_5, 知 $\delta = 0$. 这样

$$\overline{z}^1 = \beta_1(a_1a_2) + \beta_2(a_2a_3) + \beta_3(a_3a_1).$$

但由 $\partial\overline{z}^1 = 0$, 立知 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$, 故 $\overline{z}^1 = \beta z^1$.

2) 再来证明 $\alpha z^1 \sim 0$ 的充要条件是 $\alpha = 0$.

充分性显然, 因此只要证必要性.

若 $\alpha z^1 \sim 0$, 则有 $c^2 \in C_2(K)$ 使 $\partial c^2 = \alpha z^1$. 于是由 (a_1a_2) 在 αz^1 中出现 α 次, 那么 $(a_1a_2a_5)$ 就得出现在 c^2 中, 而且也是 α 次. 因为其它的 2 维有向单形, 它们的边界不提供 (a_1a_2). 但这时 $\partial(a_1a_2a_5)$ 包含 (a_2a_5). 故为了消去 $\alpha(a_2a_5),(a_5a_2a_6)$ 得在 c^2 中出现 α 次. 这样下去, 可知 $c^2 = \alpha\left(\sum_{i=1}^{6}\sigma_i^2\right)$. 于是 $\partial c^2 = \alpha z^1 - \alpha\tilde{z}^1$. 但按假定, $\partial c^2 = \alpha z^1$, 故 $\alpha\tilde{z}^1 = 0$. 于是 $\alpha = 0$.

结合 1) 和 2), 知 $H_1(K) = \mathbb{Z}$.

¡　在 $H_1(K)=\mathbb{Z}$ 的计算中，可以总结为两步．一是"消去"对角棱，二是"消去"顶端棱．对角棱之所以能被消去，是因为它可以用两条"直角边"代，而顶端棱被消去，是因为它可以用"长方形"的另外三个边代．

至于 $H_0(K)$ 的计算，仍和前面的例一样，由于有

$$a_1 \sim a_i, \quad i=2,\cdots,6,$$

知 $H_0(K)=\mathbb{Z}$.

这样，对于柱面而言，它的同调群为

$$H_i(K)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & i=0,1,\\ 0, & i\neq 0,1.\end{cases}$$

2.6　例　Möbius 带

Möbius 带是将长方形的一条边经过 180° 的扭转后，与对边叠合，即它是按图 1.13 中所示的方向叠合两条对边 a_1a_4 而得.

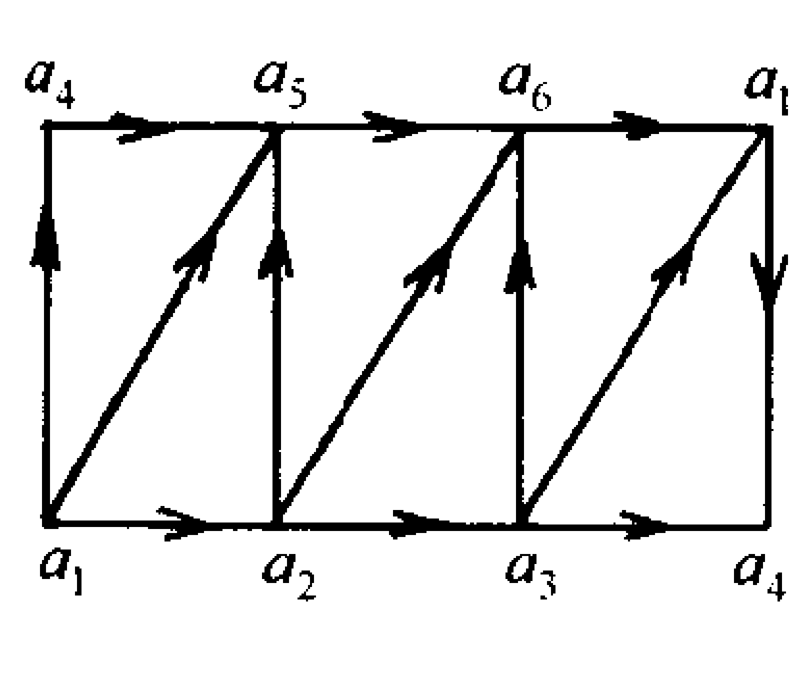


图 1.13

图 1.13 中还标出了它的一个 (曲) 单纯剖分 K. 这时 K 有 6 个顶点， 12 条棱和 6 个三角形．箭头给出了有向单形的一个基本组 $\{\sigma_i^k\}$.

先计算 $H_2(K)$.

这里和上例一样，立知 $Z_2(K)=0$, 故 $H_2(K)=0$.

再考虑 $H_1(K)$. 首先，

$$z^1=(a_1a_2)+(a_2a_3)+(a_3a_4)-(a_1a_4)$$

和

$$\tilde{z}^1 = (a_1a_4) + (a_4a_5) + (a_5a_6) + (a_6a_1)$$

都是 1 维闭链. 又由

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{6}\sigma_i^2\right) = (a_1a_2) + (a_2a_3) + (a_3a_4) - (a_4a_1)$$
$$-\{(a_1a_4) + (a_4a_5) + (a_5a_6) + (a_6a_1)\},$$

知道 $z^1 \sim \tilde{z}^1$. 即 z^1 和 $\tilde{z}^1$ 属于同一个同调类.

1) 可以证明: 如果 $\overline{z}^1 \in Z_1(K)$, 那么有 $\beta \in \mathbb{Z}$, 使 $\overline{z}^1 \sim \beta z^1$.

实际上, 和上例一样, 最后总可假定 $\overline{z}^1$ 中既没有有向的"对角棱"出现, 也没有"顶端"的有向单形出现, 至于垂直方向的有向单形, 我们只能说 $(a_2a_5), (a_3a_6)$ 不出现. (为什么这时不能说 (a_1a_4) 也不出现？) 也就是讲,

$$\overline{z}^1 = \beta_1(a_1a_2) + \beta_2(a_2a_3) + \beta_3(a_3a_4) + \beta_4(a_4a_1).$$

现在利用 $\partial\overline{z}^1 = 0$, 立刻知道 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta$. 故得证.

2) 和上例一样, 可以证明: 如果 $\alpha z^1 \sim 0$, 那么 $\alpha = 0$. 因此当 $m \neq n$ 时, mz^1 和 nz^1 不同调.

这样 $H_1(K) = \mathbb{Z}$.

由于 $a_1 \sim a_i, i = 2, \cdots, 6$ 成立, 故 $H_0(K) = \mathbb{Z}$.

总结起来, 对于 Möbius 带而言, 它的同调群为

$$H_i(K) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 1, \\ 0, & i \neq 0, 1. \end{cases}$$

¡ 柱面和 Möbius 带虽不同胚 (为什么？), 可它们的同调群却完全一样. 这个事实告诉我们, 同调群, 或者说, 边界关系, 虽然是拓扑不变的, 但它们还不够精细, 还不足以决定空间的拓扑型.

2.7 例 环面

环面是分别叠合图 1.14 中方形的两条垂直边和两条水平边而得.

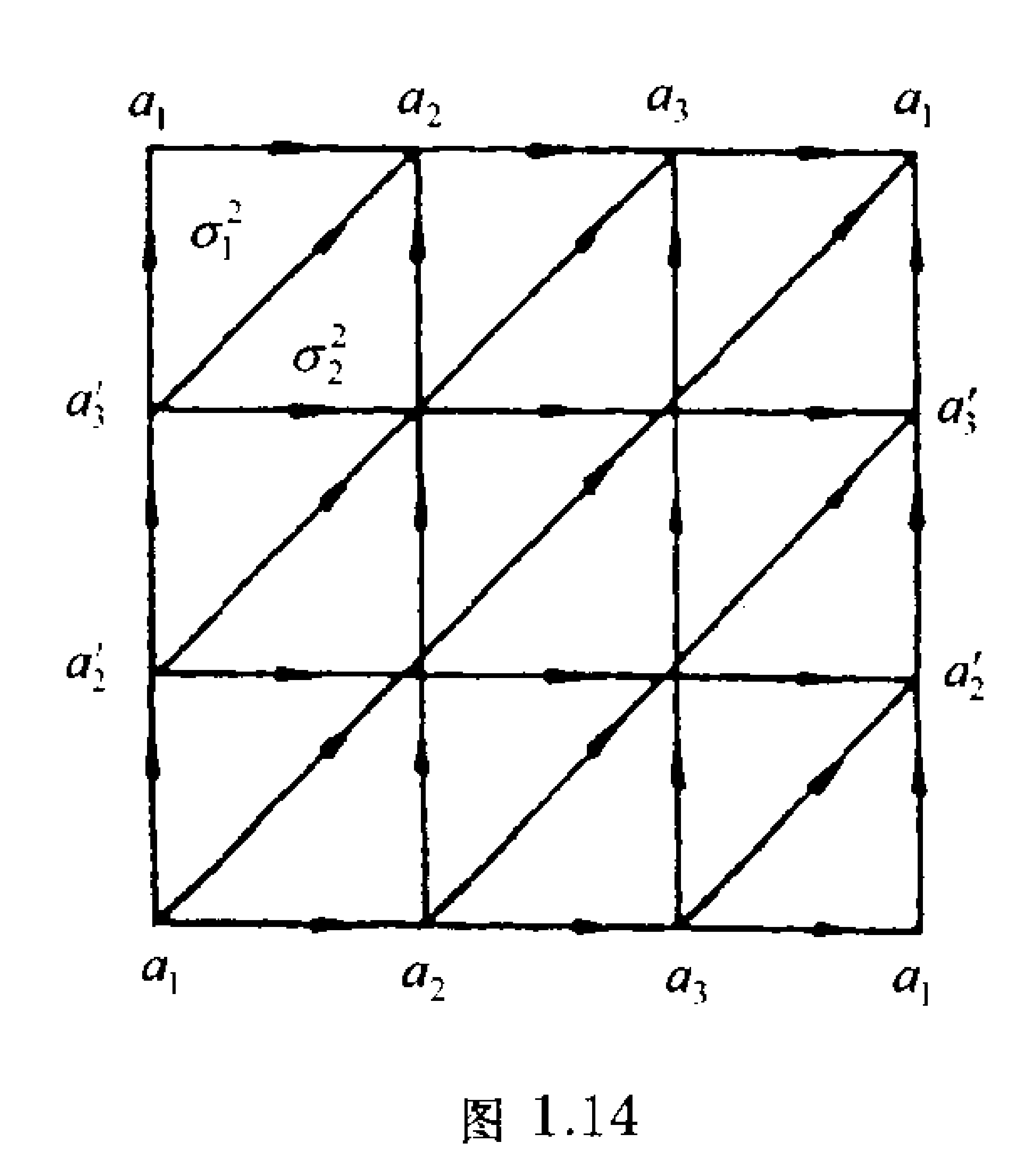


图 1.14

上图中还标出了它的一个 (曲) 单纯剖分 K. 这时 K 有 9 个顶点, 27 条棱和 18 个三角形. 基本组 $\{\sigma_i^k\}$ 的 1 维有向单形. 它们的指向由箭头标明.

先计算 $H_2(K)$.

设 $z^2 \in Z_2(K)$ 中包含有 σ_1^2, 那么由 $\partial z^2 = 0$, 知 σ_2^2 也要在 z^2 中出现, 而且出现的次数一样 (为此, 必要时可改一下定向). 这样继续下去, 每个 σ_i^2 都得在 z^2 中出现, 而且次数也都相同, 即

$$z^2 = \alpha \left(\sum_{i=1}^{18} \sigma_i^2 \right).$$

显然,

$$\partial \left(\sum_{i=1}^{18} \sigma_i^2 \right) = 0.$$

因此 $H_2(K) = Z_2(K) = \mathbb{Z}$.

再考虑 $H_1(K)$. 首先,

$$z^1 = (a_1a_2) + (a_2a_3) + (a_3a_1)$$

和

$$\tilde{z}^1 = (a_1a_2') + (a_2'a_3') + (a_3'a_1)$$

都是 1 维闭链.

1) 给定同调类 $[\overline{z}^1]$, 必有 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ 使 $[\overline{z}^1] = [\alpha z^1 + \beta \tilde{z}^1]$.

实际上, 如果 $\overline{z}^1$ 中含有"对角"有向棱和中间的"垂直"有向棱的话, 那么加上这些棱的"右邻"有向三角形 (对于前者是一个, 对于后者是四个或两个) 的边缘链以后, 这些有向棱就不再出现. 因此不妨假设 $\overline{z}^1$ 中不含这两类有向棱. 于是 $\overline{z}^1$ 中只含"水平"有向棱和最右边的"垂直"有向棱. 假定 $\overline{z}^1$ 中含有一条中间的"水平"有向棱, 那么由 $\partial\overline{z}^1 = 0$, 立刻知道, 处于同一水平线上的其它两条有向棱也应出现, 而且出现的次数相同. 于是加上在它们"下方"的诸有向三角形的适当倍数的边缘链以后, 这些中间的水平有向棱就也不再出现. 于是 $\overline{z}^1$ 同调于一个只由"边上"的有向棱所组成的 1 维闭链. 这时, 利用它为闭的这个事实, 立刻可以得到 $\overline{z}^1 \sim \alpha z^1 + \beta \tilde{z}^1$.

2) 如果 $\alpha z^1 + \beta \tilde{z}^1 \sim 0$, 那么 $\alpha = \beta = 0$.

由假定 $\alpha z^1 + \beta \tilde{z}^1 \sim 0$, 知有 $c^2 \in C_2(K)$, 使

$$\partial c^2 = \alpha z^1 + \beta \tilde{z}^1.$$

注意 z^1 和 $\tilde{z}^1$ 都是由边上的有向棱组成. 于是 ∂c^2 不包含有中间的有向棱. 所以 $c^2 = r\left(\sum_{i=1}^{18} \sigma_i^2\right)$. 这样

$$\partial c^2 = r\partial\left(\sum_i \sigma_i^2\right) = 0,$$

于是

$$\alpha z^1 + \beta \tilde{z}^1 = 0.$$

但是

$$\alpha z^1+\beta\tilde{z}^1 =\alpha(a_1a_2)+\alpha(a_2a_3)+\alpha(a_3a_1)$$
$$+\beta(a_1a_2')+\beta(a_2'a_3')+\beta(a_3'a_1),$$

于是系数 $\alpha=\beta=0$.

这样, $H_1(K)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

由于 $a_1\sim a$ 对任一顶点 a 成立, 故 $H_0(K)=\mathbb{Z}$.

总结起来, 对于环面而言, 它的同调群为

$$H_i(K)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & i=0,2,\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & i=1,\\ 0, & i\neq 0,1,2.\end{cases}$$

2.8 例 投影平面

投影平面是由叠合图 1.15 中 2 维实心球 (圆盘) 的对径点 (处于同一直径上的两个端点) 而得.

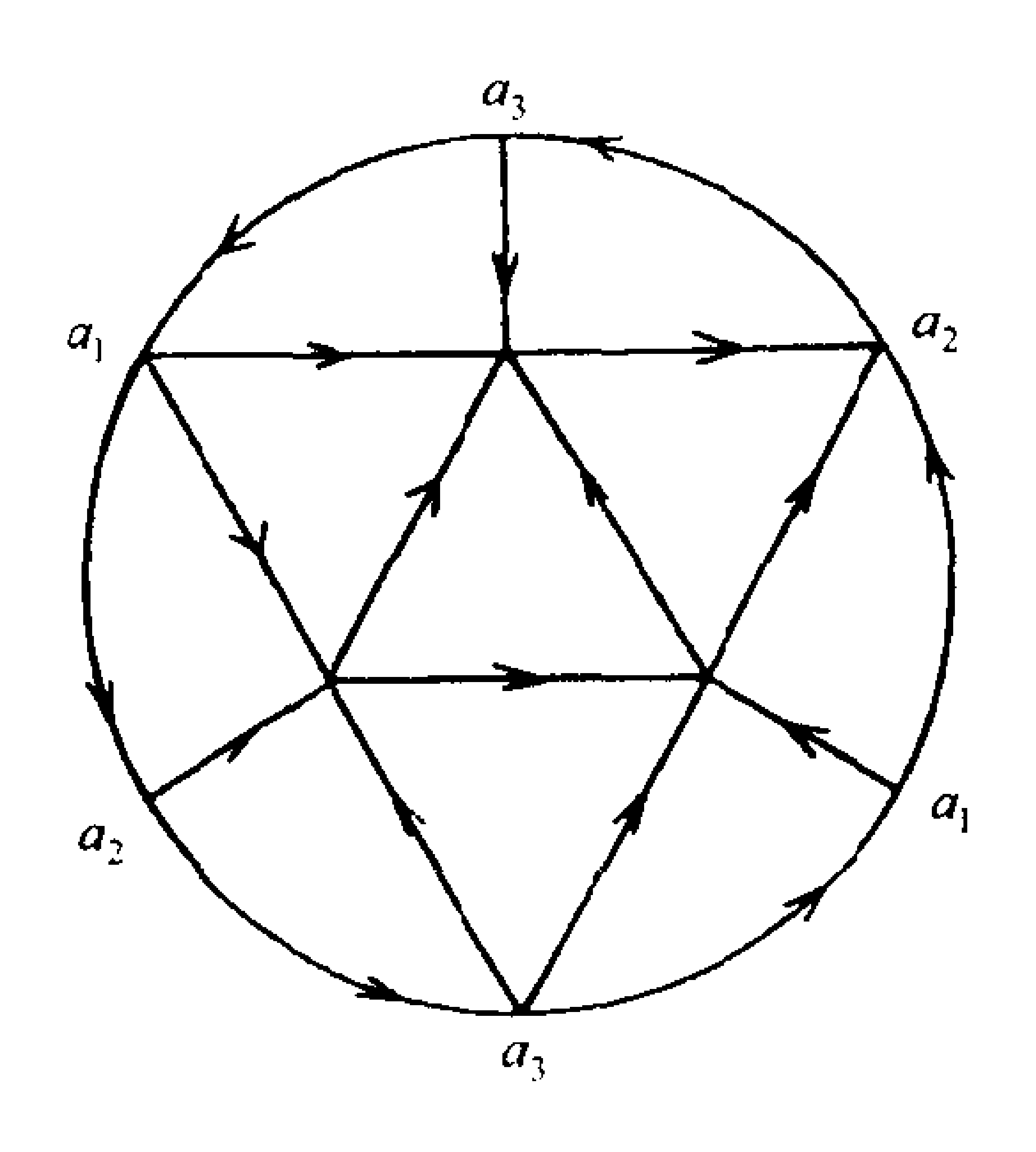


图 1.15

上图中还标出了它的一个 (曲) 单纯剖分 K. 这时 K 有 6 个顶点, 15 条棱和 10 个三角形. 基本组 $\{\sigma_i^k\}$ 中的 1 维有向单形, 它们的指向由箭头标明.

仍然先计算 $H_2(K)$.

设 $z^2(\in Z_2(K))$ 中有某个 σ_i^2 出现. 那么由"内部"有向棱不能在 $\partial z^2(=0)$ 中出现, 知道和它相邻的 σ_j^2 也应出现, 而且次数相同 (必要时可改一下定向). 这样下去, 知

$$z^2 = \alpha\left(\sum_{i=1}^{10}\sigma_i^2\right).$$

但

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{10}\sigma_i^2\right) = 2\{(a_1a_2)+(a_2a_3)+(a_3a_1)\} \neq 0,$$

因此 $Z_2(K)=0$, 于是 $H_2(K)=0$.

再考虑 $H_1(K)$. 这时,

$$z^1 = (a_1a_2)+(a_2a_3)+(a_3a_1)$$

是 1 维闭链. 容易证明, 若 $\overline{z}^1 \in Z_1(K)$, 则存在 $\alpha \in \mathbb{Z}$ 使 $\overline{z}^1 \sim \alpha z^1$.

又 $\alpha z^1 \sim 0$, 则 $\alpha \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$. 实际上, 由 $\alpha z^1 \sim 0$, 知有 $c^2 \in C_2(K)$, 使

$$\partial c^2 = \alpha z^1.$$

由于此式表示 ∂c^2 不含"内部"有向棱, 故和 $H_2(K)$ 的计算一样, 知 $c^2 = \gamma(\Sigma\sigma_i^2)$. 于是

$$\alpha z^1 = \gamma\partial(\Sigma\sigma_i^2) = \gamma\cdot 2z^1,$$

即

$$\alpha = 2\gamma.$$

有了以上两事实, 知 $H_1(K)\cong\mathbb{Z}/2$.

又由 $a_1 \sim a$ 对所有的顶点 a 成立, 知 $H_1(K)\cong\mathbb{Z}$.

总结起来，对于投影平面而言，它的同调群为

$$H_i(K)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & i=0,\\ \mathbb{Z}/2, & i=1,\\ 0, & i\neq 0,1.\end{cases}$$

2.9　例　二维球面 S^2

由于二维球面 S^2 可以看作是四面体的表面，所以它有一个单纯剖分 K 如图 1.16 所示．这时 K 有 4 个顶点， 6 条棱和 4 个三角形．箭头给出了有向单形的一个基本组 $\{\sigma_i^k\}$.

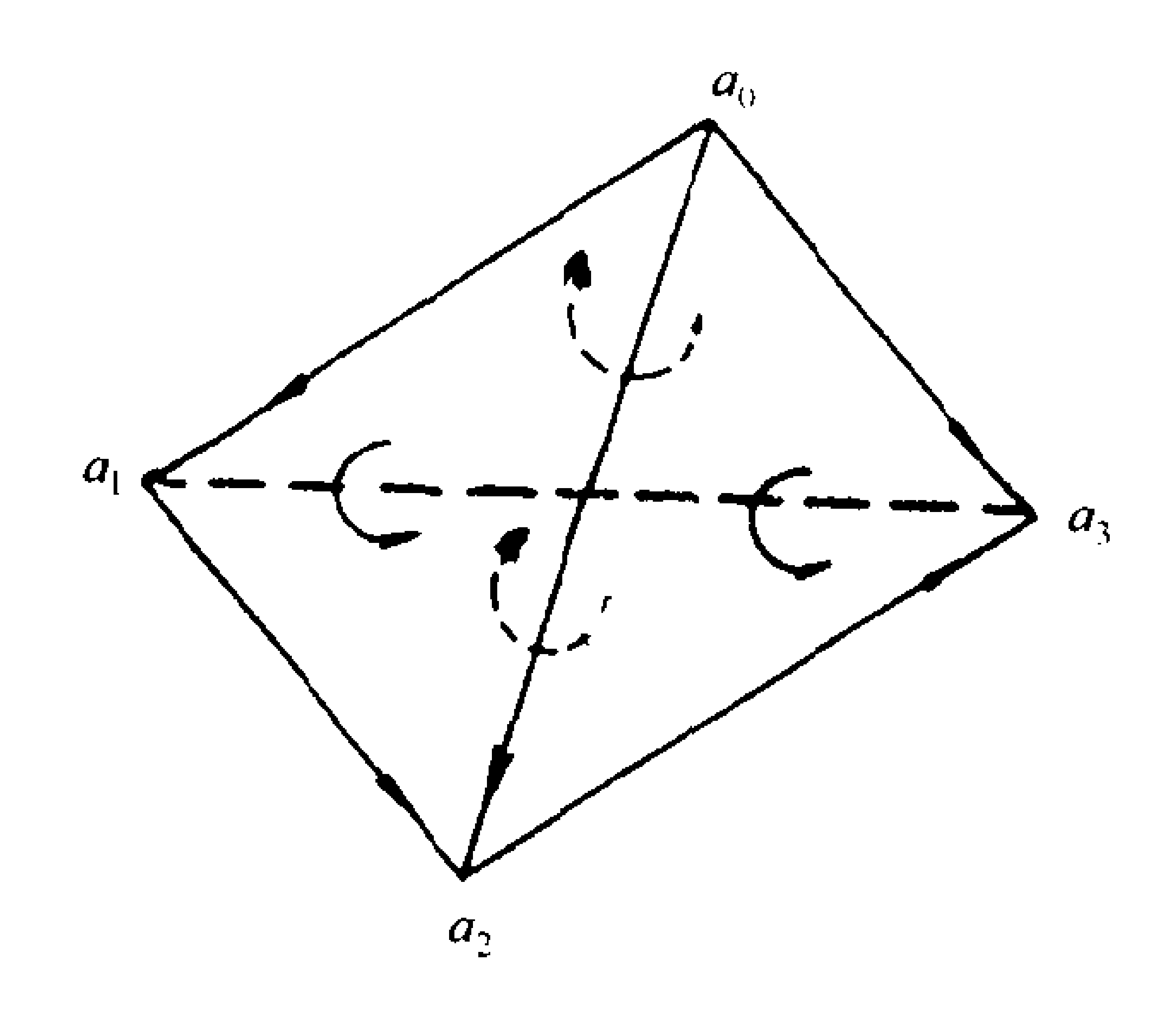


图 1.16

先计算 $H_2(K)$.

显然， 2 维链

$$(a_0a_1a_2)+(a_0a_2a_3)+(a_1a_3a_2)+(a_0a_3a_1)$$

是闭的 (为什么？)．而且其它的闭链是它的倍数 (为什么？)，因此

$$H_2(K)=Z_2(K)\cong\mathbb{Z}.$$

至于 $H_1(K)$. 这时只要注意 S^2 和 E^3 在维数 <3 时是完全一样的，而 $H_1(K)$ 只和 K 的 ≤ 2 维有向单形有关，因此由 $H_1(E^3)=0$, 知道 $H_1(K)=0$.

同样，知 $H_0(K)=H_0(E^3)=\mathbb{Z}$.

总结起来，二维球面的同调群为

$$H_i(K)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & i=0,2,\\ 0, & i\neq 0,2.\end{cases}$$

显然，上述计算可推广到 n 维球面，而得

$$H_i(S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & i=0,n,\\ 0, & i\neq 0,n.\end{cases}$$

2.10　例　Klein 瓶

Klein 瓶是按图 1.17 中所示的方向分别叠合两条水平边和两条直边而得。试给出剖分 K. 它的同调群为

$$H_i(K)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & i=0,\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2, & i=1,\\ 0, & i\neq 0,1\end{cases}$$

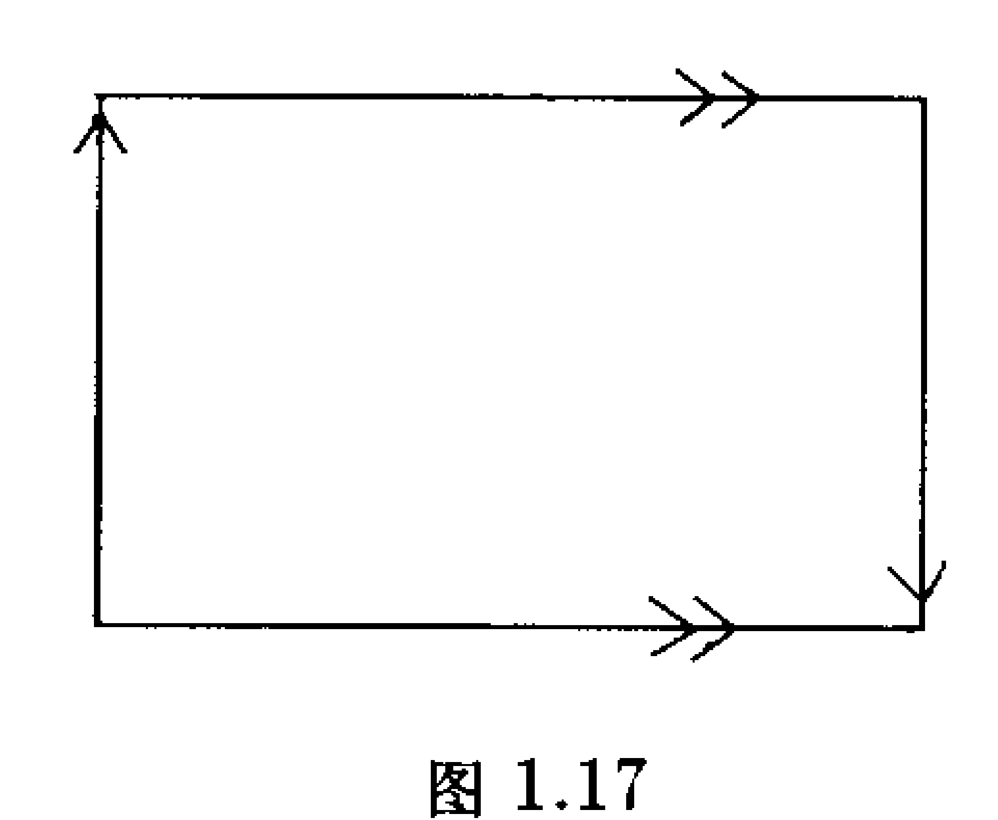


图 1.17

根据以上的计算，我们有下表：

同调群 \ 空间	E^2	柱面	Möbius 带	环面	投影平面	球面
H_0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
H_1	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	0
H_2	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$

¡　在上表中，有不是自由的可换群 ($\mathbb{Z}/2$) 出现. 例如投影平面的 1 维同调群就是. 请读者举一个例子，它的 1 维同调群是 $\mathbb{Z}/m$, 这里 m 为正整数.

§3. 零维同调群

本节来计算任意复形的零维同调群. 受上一节诸例的计算的启发, 我们有

3.1 定义 称复形 K 的两个顶点 a 和 b 为 **可连接的**, 如果存在 K 的一串顶点

$$a_0, a_1, \cdots, a_k$$

使 $a_0 = a, a_k = b$, 又 a_i, a_{i+1} 决定 K 的一个 1 维单形, $i = 0, 1, \cdots, k-1$. 形象地说, a 和 b 可连接, 如果它们可用 K 中的"折线"将它们连起来.

3.2 命题 在复形中, 顶点之间的可连接性是一个等价关系.

证明 留做练习. ◁

3.3 命题 在上述顶点间的等价关系下, 属于同一个类中的诸顶点, 以及它们在 K 中所张成的诸单形的集合, 是 K 的一个子复形, 叫做 K 的一个 **组合分支**.

证明 留做练习. ◁

3.4 定义 复形 K 称为 **连通的**, 如果它只有一个组合分支.

现在我们来研究, 复形 K 连通和多面体 $|K|$ 为道路连通 1) 的关系.

道路连通, 按定义, 是指空间的任意两点之间, 有一条道路将它们连起来, 而复形连通, 是指任意两个顶点之间可用"折线"将它们连起来, 因此证明下述命题不会有什么困难.

3.5 命题 如果 K 连通, 那么 $|K|$ 道路连通.

证明 任给 $|K|$ 的两点 x 和 y. 设 K 的单形 A 和 B 分别包含 x 和 y. 任取 A 的顶点 a. 那么 x 和 a 决定 A 中的一条线段 $[x, a]$. 同样取 B 的顶点 b 后, b 和 y 决定 B 中的一条线段

---

1) 空间 X 叫做道路连通, 如果对 X 的任意两点 a 和 b, 存在一条"道路"$\omega: I \to X$ 使 $\omega(0) = a, \omega(1) = b$, 这里 ω 为映射, I 为单位区间 $[0, 1]$.

$[b,y]$. 而按 K 连通的假定, a 和 b 可用一串 1 维单形将它们连起来. 于是在它前面接上 $[x,a]$, 后面接上 $[b,y]$, 我们就得到一条连接 x 和 y 的道路 ω. ◁

¡ 显然, 为了**尽可能的简单**, 也就是说, **能在低维处理就不让它复杂化而放到高维去**. 这样, 上述证明中的 A 和 B 当然应分别取为 x 和 y 的承载单形.

为了证明上述命题的逆命题, 我们先将顶点 a 和 b 可连接的条件改成和道路连通类似的形式.

顶点 a 和 b 可连接的充要条件是存在 (分段线性) 映射 $f: I \to |K|$ 使 $f(0)=a, f(1)=b, f\left(\frac{l}{k}\right)=a_l$($K$ 的顶点), f 在 $\left[\frac{l}{k},\frac{l+1}{k}\right]$ 上为线性, $l=0,1,\cdots,k-1$.

于是为了证明上述命题的逆命题, 我们要将连接顶点 a 和 b 的一条任意的道路 ω 改造为分段线性的映射 f.

如果 K 中存在一个单形, 它以 a,b 为自己的顶点, 那么 f 容易定义. 实际上, 这时取 f 为线性映射就可以了. 可是, 一般来讲, 在 K 中, 这种以 a,b 为顶点的单形不一定存在. 那么将 ω 限制于 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, 情况如何呢? 当然, 这时 $\omega\left(\frac{1}{2}\right)$ 不一定是 K 的顶点. 但是我们可以先将它改造为 K 的顶点. 按上面所说的, 尽可能简单的原则, $\omega\left(\frac{1}{2}\right)$ 应改造为 $\omega\left(\frac{1}{2}\right)$ 的承载单形的某个顶点 $f\left(\frac{1}{2}\right)$. 而 f 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上是否可线性化, 等价于 $f(0)=\omega(0)=a$ 和 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 是否同属 K 的某个单形. 也即, a 是否为 $\omega\left(\frac{1}{2}\right)$ 的承载单形的顶点. 如果是, 问题解决; 如果不是, 取 $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ 继续往下考虑. 我们说, 只要 N 取得足够大, f 在 $\left[0,\frac{1}{N}\right]$ 上就可以线性化. 也就是说, 可以证明 $f(0)=a$ 是 $\omega\left(\frac{1}{N}\right)$ 的承载单形的顶点. 为了证明这一点, 我们利用 ω 的连续性. 由于 ω 在 0 连续, 因此, 事先指定好 $\omega(0)=f(0)=a$ 的一个邻域 U, 那么只要 N 足够大, $\omega\left(\left[0,\frac{1}{N}\right]\right)$ 就整个落在 U 内. 特别 $\omega\left(\frac{1}{N}\right)\in U$. 于

是问题变成怎样取 U, 使 $\omega\left(\frac{1}{N}\right)\in U$ 时, 有: a 为 $\omega\left(\frac{1}{N}\right)$ 的承载单形的顶点. 为此, 我们考虑 $|K|$ 中的点集

$$St_K a=\{x \mid a \text{ 为 } x \text{ 的承载单形的顶点}\}.$$

¡ 显然 ω 在 $\left[0,\frac{1}{N}\right]$ 上可以线性化的充要条件是 $\omega\left(\frac{1}{N}\right)\in St_K a$.

3.6 命题 点 $x\in St_K a$ 的充要条件是 $x\in |K|\setminus\bigcup\limits_{a\notin A}A$.

证明 必要性. 如果 $x\notin |K|\setminus\bigcup\limits_{a\notin A}A$, 即 $x\in\bigcup\limits_{a\notin A}A$. 于是存在某个包含 x 的单形 A, 它不以 a 为自己的顶点. 但是 x 的承载单形是包含 x 的最低维单形, 因此它就为 A 的面. 可是由假定, 这个承载单形以 a 为顶点. 故 A 也以 a 为自己的顶点. 矛盾！

充分性. 如果 a 不是 x 的承载单形的顶点. 即 x 的承载单形不包含 a, 这样 $x\in\bigcup\limits_{a\notin A}A$, 即 $x\notin |K|\setminus\bigcup\limits_{a\notin A}A$. 与开始的假定矛盾！ ◁

3.7 推论 $St_K a$ 为 $|K|$ 的开集. 特别它是 a 在 $|K|$ 中的一个邻域, 以后称它为 a 在 K 中的**星形**.

证明 由于 $St_K a=|K|\setminus\bigcup\limits_{a\notin A}A$, 而每个 A 均为 $|K|$ 中闭集, 且其个数有限, 因此 $\bigcup\limits_{a\notin A}A$ 仍为 $|K|$ 的闭子集, 故 $St_K a$ 为开集. ◁

3.8 推论 对于连接 a 和 b 的道路 $\omega: I\to |K|$ 来说, 一定存在足够大的正整数 N, 使 $\omega(0)=a$ 为 $\omega\left(\frac{1}{N}\right)$ 的承载单形的一个顶点.

证明 取 a 的邻域 $U=St_K a$. 那么由 ω 连续, 知有足够大的 N 存在, 使 $\omega\left(\left[0,\frac{1}{N}\right]\right)\subset U=St_K a$. 特别由 $\omega\left(\frac{1}{N}\right)\in St_K a$ 及 $St_K a$ 的定义知 $\omega(0)=f(0)=a$ 为 $\omega\left(\frac{1}{N}\right)$ 的承载单形的顶点. ◁

既然当 N 足够大时，可以将 $\omega|_{[0,\frac{1}{N}]}:\left[0,\frac{1}{N}\right]\to|K|$ 改造为 $f(0)=a, f\left(\frac{1}{N}\right)\in K^0$ 的线性映射 $f:\left[0,\frac{1}{N}\right]\to|K|$. 那么从 $\frac{1}{N}$ 出发再往下考虑. 逐步下去，最后就可以将 ω 改造为分段线性映射. 具体讲，我们有

3.9　命题　如果多面体 $|K|$ 是道路连通的，那么 K 连通.

证明　任给 K 的两个顶点 a 和 b. 假定它们可用 ω 连接. 现在考虑开集组 $\{St_K a|a\in K^0\}$. 显然它是 K 的一个开覆盖. 于是 $\{\omega^{-1}St_K a|a\in K^0\}$ 就构成 $I=[0,1]$ 的一个开覆盖. 因为 I 是紧的，故有有限子覆盖存在. 由此可知存在 $\delta>0$, 使得 I 的每一个长度 $<\delta$ 的子区间，一定为某个 $\omega^{-1}St_K a$ 所覆盖. 相应于此 δ, 存在正整数 N, 使 $\frac{2}{N}<\delta$, 现在将 $[0,1]$ 等分为 N 个子区间. 设 $\left(\frac{k-1}{N},\frac{k+1}{N}\right)$ 为 $\omega^{-1}St_K a_k$ 所覆盖，那么 $\omega\left(\left(\frac{k-1}{N},\frac{k+1}{N}\right)\right)\subset St_K a_k$. 命 $f\left(\frac{k}{N}\right)=a_k$. 那么 K 的顶点 $a_0=a, a_1,\cdots,a_N=b$ 适合条件：相邻的顶点同属 K 中某个单形. 于是 f 可以分段线性化. 这样，a 和 b 为可连接的. 故 K 连通. ◁

对于连通的复形 K, 它的零维同调群可以和 §2 的诸例那样来进行计算. 得

3.10　定理　若 K 连通，那么

$$H_0(K)=\mathbb{Z}.$$ ◁

3.11　定理　如果复形 K 有 q 个组合分支 $K_1,\cdots,K_q$, 那么

$$K=K_1\cup\cdots\cup K_q,$$

$$K_i\cap K_j=\emptyset,\quad 1\leq i\neq j\leq q.$$

而且 $|K_1|,\cdots,|K_q|$ 恰为 $|K|$ 的全部道路连通分支.

证明　留给读者. ◁

3.12 定理 若 $K_1,\cdots,K_q$ 为复形 K 的全部组合分支. 那么

$$H_k(K)=H_k(K_1)\oplus\cdots\oplus H_k(K_q).$$

证明 $K_1,\cdots,K_q$ 的基本组合在一起是 K 的基本组, 因此

$$C_k(K)=C_k(K_1)\oplus\cdots\oplus C_k(K_q). \qquad (1)_k$$

现在我们证明

$$Z_k(K)=Z_k(K_1)\oplus\cdots\oplus Z_k(K_q). \qquad (2)_k$$

实际上, 任取 $z_k\in Z_k(K)$. 由于 $Z_k(K)\subset C_k(K)$, 故由 $(1)_k$ 知 z_k 有以下的唯一表达式:

$$z_k=z_k^1+\cdots+z_k^q,\quad z_k^i\in C_k(K_i),\quad i=1,\cdots,q.$$

由于 $\partial z_k=0$, 于是

$$\partial z_k^1+\cdots+\partial z_k^q=0. \qquad (3)$$

注意 z_k^i 是 K_i 的链, 而 K 上的 ∂ 限制在 K_i 上, 与 K_i 上的边缘算子相同. 因此 ∂z_k^i 可以看成是 z_k^i 在 K_i 中取边缘. 这样 $\partial z_k^i\in C_{k-1}(K_i)$ 将 (3) 和 $(1)_{k-1}$ 结合, 立得

$$\partial z_k^i=0,\quad i=1,\cdots,q.$$

于是

$$z_k=z_k^1+\cdots+z_k^q,\quad z_k^i\in Z_k(K_i),\quad i=1,\cdots,q.$$

这样 (2) 得证.

同样可证

$$B_k(K)=B_k(K_1)\oplus\cdots\oplus B_k(K_q). \qquad (4)$$

命

$$\phi : Z_k(K) \to \oplus_{i=1}^q H_k(K_i)$$

为

$$\phi(z_k) = \phi\left(\sum_i z_k^i\right) = \sum_i [z_k^i],$$

这里 $z_k^i \in Z_k(K_i)$ 如前，而 $[z_k^i] \in H_k(K_i), i = 1, \cdots, q$.

显然，ϕ 为满同态，而 $\mathrm{Ker}\phi = \oplus_{i=1}^q B_k(K_i) = B_k(K)$. 于是由群论的第一同构定理，得

$$H_k(K) = H_k(K_1) \oplus \cdots \oplus H_k(K_q). \qquad \triangleleft$$

3.13 推论 以下诸断言互相等价：

1) 复形 K 有 q 个组合分支.

2) 多面体 $|K|$ 有 q 个道路连通分支.

3) $H_0(K) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{q\text{ 个}}$. $\triangleleft$

§4. 上同调群

在头两节里面，我们引进了同调群，并对一些常见的可剖分空间，通过它们的曲单纯剖分，计算了它们的同调群.

同调群是拓扑不变的证明，我们现在还没有完成. 不过，由于它是从边界派生出来的，而一个图形是否为另一个的边界显然是拓扑不变的，因此我们相信它的不变性是可以证明的. 但仔细分析一下同调群的定义，其中边缘同态

$$\partial_k : C_k(K) \to C_{k-1}(K)$$

只反映了高维图形的边界是哪些这一点. 也就是讲，同调群只利用了“甲的边界包含有乙”这一半，另一半“乙出现在甲的边界中”，亦即由低维图形，按边界关系，去找那些、使它出现在其边

界中的高一维图形这一半尚未利用. 很好地将这一半开发出来, 我们就得所谓上同调群.

为了把以上的想法具体化、公式化, 我们将借助于边缘同态 ∂_k 所决定的关联矩阵 (∂_k). 按定义 (参见 (1.25)), 它是由关联数 $[\sigma_i^k : \sigma_j^{k-1}]$ 所构成的矩阵

$$([\sigma_i^k : \sigma_j^{k-1}])_{1\leq i\leq\varphi_k, 1\leq j\leq\varphi_{k-1}},$$

即: 边缘同态 ∂_k 在 $C_k(K)$ 和 $C_{k-1}(K)$ 的基 $\{\sigma_i^k\}$ 和 $\{\sigma_j^{k-1}\}$ 之下所对应的矩阵. 为醒目起见, 在矩阵 (∂_k) 的左方添一列 $\{\sigma_i^k\}$, 在上方添一行 $\{\sigma_j^{k-1}\}$, 于是有下表:

∂_k	σ_1^{k-1}	$\cdots$	σ_j^{k-1}	$\cdots$	$\sigma_{\varphi_{k-1}}^{k-1}$
σ_1^k	$[\sigma_1^k : \sigma_1^{k-1}]$	$\cdots$	$[\sigma_1^k : \sigma_j^{k-1}]$	$\cdots$	$[\sigma_1^k : \sigma_{\varphi_{k-1}}^{k-1}]$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
σ_i^k	$[\sigma_i^k : \sigma_1^{k-1}]$	$\cdots$	$[\sigma_i^k : \sigma_j^{k-1}]$	$\cdots$	$[\sigma_i^k : \sigma_{\varphi_{k-1}}^{k-1}]$
$\vdots$					
$\sigma_{\varphi_k}^k$	$[\sigma_{\varphi_k}^k : \sigma_1^{k-1}]$	$\cdots$	$[\sigma_{\varphi_k}^k : \sigma_j^{k-1}]$	$\cdots$	$[\sigma_{\varphi_k}^k : \sigma_{\varphi_{k-1}}^{k-1}]$

从这个图就很容易知道边缘同态 ∂_k 的值. 实际上 $\partial_k\sigma_i^k$ 就是取 σ_i^k 所在的行的关联数与相应的 $k-1$ 维基本组中的元做乘积, 然后再求和就行了. 也就是说, 行反映的是从 σ_i^k 出发, 有哪些 $(k-1)$ 维的 σ_j^{k-1} 在它的边界中出现 ($[\sigma_i^k : \sigma_j^{k-1}] \neq 0$ 表示 σ_j^{k-1} 在 σ_i^k 的边界中出现, 否则不出现). 现在如果要反其道而行之, 即从 σ_j^{k-1} 出发, 想找出全部的 k 维 σ_i^k, 使 σ_j^{k-1} 出现在它们的边界中, 那当然就是用 σ_j^{k-1} 所在的列的关联数, 与相应的 k 维基本组 $\{\sigma_i^k\}$ 中的元做乘积, 然后再求和就行了, 即应定义**上边缘同态**

$$\delta^{k-1} : C_{k-1}(K) \to C_k(K)$$

为

$$\delta^{k-1}(\sigma_j^{k-1}) = \sum_{i=1}^{\varphi_k}[\sigma_i^k : \sigma_j^{k-1}]\sigma_i^k, \tag{1}$$

然后再线性扩充它.

这时 δ^{k-1} 也对应一个矩阵

$$(\delta^{k-1}) = ([\sigma_i^k : \sigma_j^{k-1}])_{1\leq j\leq \varphi_{k-1}, 1\leq i\leq \varphi_k}.$$

显然, $(\delta^{k-1}) = (\partial_k)^T$, 这里右上指标 T 表示转置.

4.1 引理 对于上边缘同态 (1), 我们有

$$\delta^k \delta^{k-1} = 0, \tag{2}$$

或者等价地, 对于矩阵 (δ^k) 而言, 有

$$(\delta^{k-1})(\delta^k) = 0.$$

证明 这由 $(\delta^{k-1}) = (\partial_k)^T$, 以及 (1.27), 得

$$(\delta^{k-1})(\delta^k) = (\partial_k)^T(\partial_{k+1})^T = ((\partial_{k+1})(\partial_k))^T = 0. \qquad \lhd$$

4.2 推论 $\mathrm{Ker}\ \delta^k \supset \mathrm{Im}\ \delta^{k-1}$.

证明 这由 (2) 立知. $\lhd$

4.3 定义 复形 K 的 k 维 **上闭链群** $Z^k(K)$ 和 **上边缘链群** $B^k(K)$, 分别为 $\mathrm{Ker}\ \delta^k$ 和 $\mathrm{Im}\delta^{k-1}$. 它们的商群

$$Z^k(K)/B^k(K) = \mathrm{Ker}\ \delta^k/\mathrm{Im}\ \delta^{k-1}$$

简记为 $H^k(K)$, 叫做复形 K 的第 k 个 **上同调群**.

由于上同调群也是由边界关系导出的, 因此和同调群一样, 它们也应该是拓扑不变的. 不过, 由于取边界这个过程, 一般总是从高维到低维, 所以同调群早在 Poincaré 时代就已出现. 而上同调群, 因为是按边界关系, 从低维往高维走, 人们不太习惯, 所以它的出现要晚得多, 实际上是迟至 30 年代才由 Lefschetz, Whitney 以及 Kolmogorov 等提出和完善. 但上同调的概念被开发出来以后, 它的重要性逐渐被人们所认识. 特别是在某些课题

的讨论中，例如流形上的对偶定理，同伦理论中的障碍论，微分流形上的 de Rham 定理，分析学中以层为系数的上同调等，采用上同调的语言，比之同调更为自然和方便. 不过，在上述诸场合，上同调是以另一种形式 —— 对偶的形式出现. 它和我们上面讲的、用往高维走的边界决定的上同调是一回事. 我们现在就来解说它.

边缘同态 ∂_k 和上边缘同态 δ^{k-1} 都是从链群到链群的同态，不过它们的定义域和取值域正好相反，即我们有

$$C_k(K) \underset{\delta^{k-1}}{\overset{\partial_k}{\rightleftarrows}} C_{k-1}(K).$$

在以基本组 $\{\sigma_i^k\}$ 和 $\{\sigma_j^{k-1}\}$ 为 $C_k(K)$ 和 $C_{k-1}(K)$ 的自由基以后，它们的矩阵 (∂_k) 和 (δ^{k-1}) 之间存在着关系

$$(\delta^{k-1}) = (\partial_k)^T.$$

由线性代数，我们知道，若以 V' 表示向量空间 V 的对偶空间 (即：由 V 上的线性函数所组成的向量空间)，那么当 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的基时，$f_1,\cdots,f_n$ 为 V' 的基，这里 $f_1,\cdots,f_n$ 由

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i,j \le n,$$

决定，叫做 $e_1,\cdots,e_n$ 的对偶基. 又若 $\varphi: V \to \overline{V}$ 为线性变换，$e_1,\cdots,e_n$ 和 $\overline{e}_1,\cdots,\overline{e}_m$ 分别为 V 和 $\overline{V}$ 的基，A 为 φ 在这两组基下所对应的矩阵，那么 φ 所决定的对偶变换 $\varphi': \overline{V}' \to V'$，在对偶基 $\overline{f}_1,\cdots,\overline{f}_m$ 和 $f_1,\cdots,f_n$ 下所对应的矩阵

$$B = A^T.$$

在线性代数的上述结果启发之下，当然也就希望将“对偶”的概念，从向量空间的场合搬到群上来. 而且当这种“移植”完成后，边缘同态 ∂_k 和上边缘同态 δ^{k-1} 应互为“对偶”.

仿照向量空间的对偶空间是由线性函数组成的这个事实，我们有

4.4　定义　在群 G 上定义、在整数群 $\mathbb{Z}$ 上取值的同态，可以按下面的办法构成一个群，叫做群 G 到群 $\mathbb{Z}$ 的 **同态群**，记为 $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z})$.

设 $f_i: G \to \mathbb{Z}, i = 1, 2,$ 是两个同态，于是由 $(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g)$ 所规定的

$$f_1 + f_2 : G \to \mathbb{Z}$$

显然为同态，故 $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z})$ 中有运算. 对于这个运算而言，将整个 G 映为 0 的同态是零元素. 逆元的存在也显然. 于是 $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z})$ 为群.

4.5　引理　设 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ 是自由群 F 的基，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 n 个随意指定的整数，那么有同态 $f: F \to \mathbb{Z}$ 使

$$f(g_i) = \alpha_i, \quad i = 1, \cdots, n,$$

此外，具有这个性质的同态 f 唯一.

证明　由于 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ 是自由群 F 的基，因此 F 中的任意一个元，都可唯一地写为

$$m_1 g_1 + \cdots + m_n g_n$$

的形状，这里 $m_1, \cdots, m_n$ 均为整数. 于是命 $f: F \to \mathbb{Z}$ 为 $f(m_1 g_1 + \cdots + m_n g_n) = m_1 \alpha_1 + \cdots + m_n \alpha_n$，那么它就具有所要的性质.

至于唯一性，可证明如下.

设 $f': F \to \mathbb{Z}$ 也具有所述的性质，那么由

$$f'(m_1 g_1 + \cdots + m_n g_n)$$

$$= m_1 f'(g_1) + \cdots + m_n f'(g_n)$$

$$= m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n = m_1 f(g_1) + \cdots + m_n f(g_n)$$

$$= f(m_1 g_1 + \cdots + m_n g_n),$$

就知道 $f' = f$. ◁

4.6 命题 设 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ 是秩为 n 的自由群 F 的基, 那么由

$$f_i(g_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, \quad j \leq n, \tag{3}$$

决定的 $\mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z})$ 中的元 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 具有以下性质:

(i) 它们是线性无关的;

(ii) $\mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z})$ 中的元均可唯一地表为它们的线性组合;

因此 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 为 $\mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z})$ 的基, 即 $\mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z})$ 也是秩为 n 的自由群. 基 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 叫做基 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ 的对偶基.

证明 根据 (4.5), 对每个 i, 恰有一个 $f_i \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z})$ 使 (3) 成立. 所以剩下的是证明 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 是 $\mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z})$ 的基, 即 (i) 和 (ii) 成立.

先证 (i): $f_1, \cdots, f_n$ 是 $\mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z})$ 中的一组线性无关元.

实际上, 如果整数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 使

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0,$$

那么, 按定义, 将左端作用于 g_k, 得

$$(\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n)(g_k) = \alpha_1 f_1(g_k) + \cdots + \alpha_n f_n(g_k)$$

$$= \alpha_k f_k(g_k) = \alpha_k;$$

但右端作用于 g_k 为 0. 于是 $\alpha_k = 0$. 上述论证对 $k = 1, \cdots, n$ 都成立. 故 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. 于是 $f_1, \cdots, f_n$ 为线性无关.

再来证明 (ii): 先证 $\mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z})$ 中的任意一个元, 均可表为 $f_1, \cdots, f_n$ 的线性组合.

考虑 $f \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z})$, 设 $f(g_i) = \alpha_i$, 那么

$$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n.$$

实际上，对于 F 的任意一个元 $\sum_{i=1}^{n} m_i g_i$, 我们有

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} m_i g_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} m_i f(g_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i f_i(g_i) = \sum_{1 \le i,j \le n} m_i \alpha_j f_j(g_i) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j\right) \left(\sum_{i=1}^{n} m_i g_i\right), \end{aligned}$$

因此 $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j$.

关于表达式的唯一性，由 $f_1, \cdots, f_n$ 为线性无关即知. ◁

4.7 命题 设 F, G 为群， $\varphi: F \to G$ 为同态，那么用 $\varphi^{\bullet}(g)(f) = g(\varphi(f)), f \in F, g \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z})$, 所决定的

$$\varphi^{\bullet}(g) \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z}),$$

而且 $\varphi^{\bullet}: \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z})$ 为同态，叫做 φ 的对偶同态. $\varphi^{\bullet}$ 有时也记作 $\mathrm{Hom}(\varphi)$.

证明 先证 $\varphi^{\bullet}(g): F \to \mathbb{Z}$ 为同态.

实际上，对 $f, f' \in F$, 我们有

$$\varphi^{\bullet}(g)(f + f') = g(\varphi(f + f')) = g(\varphi(f) + \varphi(f'))$$

$$= g(\varphi(f)) + g(\varphi(f')) = \varphi^{\bullet}(g)(f) + \varphi^{\bullet}(g)(f').$$

再证 $\varphi^{\bullet}: \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z})$ 为同态.

设 $g, g' \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z})$, 那么对 $f \in F$, 有

$$\varphi^\bullet(g+g')(f) = (g+g')(\varphi(f)) = g(\varphi(f)) + g'(\varphi(f))$$
$$= \varphi^\bullet(g)(f) + \varphi^\bullet(g')(f) = (\varphi^\bullet(g) + \varphi^\bullet(g'))(f).$$

即 $\varphi^\bullet(g+g') = \varphi^\bullet(g) + \varphi^\bullet(g')$. 所以得证. $\triangleleft$

4.8 命题 设 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ 和 $\{g'_1, \cdots, g'_m\}$ 分别是自由群 F 和 F' 的基, $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 和 $\{f'_1, \cdots, f'_m\}$ 分别是它们的对偶基; 又 $\varphi: F \to F'$ 为同态. 若

$$\varphi(g_i) = \sum_{j=1}^{m} \xi_{ij} g'_j, \quad i = 1, \cdots, n,$$

即 φ 对于基 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ 和 $\{g'_1, \cdots, g'_m\}$ 而言, 它的对应矩阵为 $(\xi_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$, 那么对偶同态 $\varphi^\bullet: \mathrm{Hom}(F', \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z})$ 对于对偶基 $\{f'_1, \cdots, f'_m\}$ 和 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 而言,对应矩阵为 $(\xi_{ij})^T$, 即

$$\varphi^\bullet(f'_i) = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ji} f_j, \quad i = 1, \cdots, m.$$

证明 按对偶同态和对偶基的定义, 我们有

$$\begin{aligned} \varphi^\bullet(f'_i)(g_j) &= f'_i(\varphi(g_j)) = f'_i\left(\sum_{k=1}^{m} \xi_{jk} g'_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \xi_{jk} f'_i(g'_k) = \xi_{ji}. \end{aligned}$$

于是由 (4.6) 的证明, 知道

$$\varphi^\bullet(f'_i) = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ji} f_j, \quad i = 1, \cdots, m. \qquad \triangleleft$$

至此, 我们完成了将对偶概念从向量空间移植到群上来的任务.

¡ 已知：向量空间是 $\mathbb{R}$ 模，可换群是 $\mathbb{Z}$ 模，因此上述对偶概念的转化在一般的模理论中也应该成立．实际上，这种一般的理论确实存在．

由于链群 $C_k(K)$ 是以基本组 $\{\sigma_i^k\}$ 为基的自由群，因此它和同态群 $\mathrm{Hom}(C_k(K),\mathbb{Z})$ 同构．为方便计，这个同态群简记为 $C^k(K)$，称为 K 的 k 维 **上链群**，它的元称为 k 维 **上链**．$C^k(K)$ 中和 $\{\sigma_i^k\}$ 对偶的基记为 $\{\tau_i^k\}$．那么 $C^k(K)$ 中的元 (上链) 均可写为

$$\sum_{i=1}^{\varphi_k}\alpha_i\tau_i^k.$$

于是按对偶基的定义，

$$\left(\sum_{i=1}^{\varphi_k}\alpha_i\tau_i^k\right)(\sigma_j^k)=\alpha_j.$$

边缘同态 $\partial_k:C_k(K)\to C_{k-1}(K)$ 的对偶同态为

$$(\partial_k)^\bullet:C^{k-1}(K)\to C^k(K).$$

它由线性扩充

$$\begin{aligned}(\partial_k)^\bullet(\tau_i^{k-1})(\sigma_j^k)&=\tau_i^{k-1}(\partial_k\sigma_j^k)\\&=\tau_i^{k-1}\left(\sum_{l=1}^{\varphi_{k-1}}[\sigma_j^k:\sigma_l^{k-1}]\sigma_l^{k-1}\right)=[\sigma_j^k:\sigma_i^{k-1}]\end{aligned}\tag{4}$$

而得．

由于 $C_k(K)$ 和 $C^k(K)$ 在对应

$$\sum\alpha_i\sigma_i^k\longleftrightarrow\sum\alpha_i\tau_i^k$$

下同构 (4.6)，于是在将 $C^k(K)$ 的对偶基 $\{\tau_1^k,\cdots,\tau_{\varphi_k}^k\}$ 的元 τ_i^k 仍记为 σ_i^k 以后 (这不会产生混乱，因为同一个记号 σ_i^k 究竟是代表链还是上链，由上下文就可判断)，(4) 式就变为

$$(\partial_k)^\bullet(\sigma_i^{k-1})(\sigma_j^k)=[\sigma_j^k:\sigma_i^{k-1}],$$

亦即

$$(\partial_k)^\bullet(\sigma_i^{k-1}) = \sum[\sigma_j^k : \sigma_i^{k-1}]\sigma_j^k.$$

这和由 (1) 式决定的

$$\delta^{k-1} : C^{k-1}(K) \to C^k(K)$$

完全一致，亦即

$$\delta^{k-1} = (\partial_k)^\bullet. \tag{5}$$

这样，引用链群的对偶 —— 上链群 $C^k(K)$ 后，上边缘同态 δ^{k-1} 就是边缘同态 ∂_k 的对偶. 以后对于上同调，我们就采用这种对偶的说法.

¡ 对偶空间的重要性及其众多作用，在线性代数和泛函分析中已有充分的显示，我们在此从几何出发 (按边界关系，从低维往高维走)，也得到了这种形式的代数结构. 这从另一方面说明了，对偶概念由于它也是几何性质的反映，因此，从几何的角度，它们也应该得到仔细的研究.

¡ 有了对偶概念，配对就接踵而至. 所以在上链群和链群间也存在着配对.

如下定义的

$$\kappa : C^k(K) \times C_l(K) \to \mathbb{Z},$$

$$\kappa(\varphi, c) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \varphi(c), & k = l \end{cases}$$

叫做 Kronecker**指数**. 有时也将 $\kappa(\varphi, c)$ 记为 $\langle\varphi, c\rangle$.

4.9 命题 Kronecker 指数 κ 是双线性的.

证明 这由定义即知. ◁

利用 Kronecker 指数，可以得到上闭链的特征如下.

4.10 命题 1) 上链 $\varphi \in Z^k(K)$ 的充要条件是 $\langle\varphi, \partial c\rangle = 0$ 对所有的 $c \in C_{k+1}(K)$ 成立. 即 φ 为上闭链的充要条件为 φ 是 $B_n(K)$ 的零化子.

2) 上链 $\psi \in B^k(K)$, 则 $\langle\psi, z\rangle = 0$ 对所有的 $z \in Z_k(K)$ 成立. 即 ψ 为上边缘链, 那么 ψ 为 $Z_k(K)$ 的零化子.

证明 对于 Kronecker 指数 κ, 我们有

$$\langle\varphi, \partial c\rangle = \langle\delta\varphi, c\rangle. \tag{6}$$

实际上, 这就是 φ 的上边缘 $\delta\varphi$ 的定义: $\delta\varphi(c) = \varphi(\partial c)$. 因此, 对 $\varphi \in Z^k(K)$, 由 $\delta\varphi = 0$, 得

$$\langle\varphi, \partial c\rangle = \langle\delta\varphi, c\rangle = \langle 0, c\rangle = 0.$$

此为 1) 中的必要性部分. 至于充分性, 即证 $\delta\varphi = 0$. 亦即证 $\delta\varphi(c) = 0$ 对所有的 $c \in C_{k+1}(K)$ 成立. 由假定 $\langle\varphi, \partial c\rangle = 0$, 因此

$$\langle\delta\varphi, c\rangle = \langle\varphi, \partial c\rangle = 0,$$

对所有的 $c \in C_{k+1}(K)$ 成立, 即 $\delta\varphi(c) = 0$. 充分性得证.

2) 若 $\psi \in B^k(K)$, 那么有 $\varphi \in C^{k-1}(K)$ 使 $\delta\varphi = \psi$. 于是由 (6), 得

$$\langle\psi, z\rangle = \langle\delta\varphi, z\rangle = \langle\varphi, \partial z\rangle.$$

但 $z \in Z_k(K)$, 故 $\partial z = 0$. 因此 $\langle\psi, z\rangle = 0$. ◁

在链群和上链群间定义的 Kronecker 指数, 可以过渡到同调群和上同调群去.

4.11 命题 Kronecker 指数有以下性质:

1) $\langle\delta\varphi, z\rangle = 0$, 对所有的 $\varphi \in C^k(K), z \in Z_{k+1}(K)$ 成立,

2) $\langle\varphi, \partial c\rangle = 0$, 对所有的 $\varphi \in Z^k(K), c \in C_{k+1}(K)$ 成立.

证明 仍然利用 (6). 于是

$$\langle\delta\varphi, z\rangle = \langle\varphi, \partial z\rangle = \langle\varphi, 0\rangle = 0, \quad \forall z \in Z_{k+1}(K),$$

又

$$\langle\varphi, \partial c\rangle = \langle\delta\varphi, c\rangle = \langle 0, c\rangle = 0, \quad \forall\varphi \in Z^k(K).$$

这样命题得证. ◁

有了这个命题，命

$$\kappa : H^k(K) \times H_l(K) \to \mathbb{Z}$$

为

$$\kappa([\varphi],[z]) = \langle \varphi, z \rangle.$$

那么它与 φ, z 在类 $[\varphi], [z]$ 中的选取无关，叫做 Kronecker 映射.

Kronecker 映射导出如下的同态：

$$\alpha : H^k(K) \to \mathrm{Hom}(H_k(X), \mathbb{Z}), \tag{7}$$

这里 $\alpha([\varphi]) \in \mathrm{Hom}(H_k(X), \mathbb{Z})$ 为如下定义的同态：

$$\alpha([\varphi])([z]) = \langle \varphi, z \rangle, \quad z \in Z_k(X).$$

对于上同调群，当然也有一个计算的问题. 不过，由于在下一节里，我们将讨论同调群和上同调群的计算，以及它们间的关系，因此这里就不再举例了. 但作为练习，建议读者自己去计算一下，上节中提到的那些复形的上同调群.

§5. 同调群的计算，同调群和上同调群间的关系

引进同调群的目的之一，是它们可以用来区分不同胚的空间，也就是说，如果两个多面体，它们具有不同的同调群，那么它们就不会同胚. 因此，同调群的计算便成了一个重要的问题. 我们在第二节里，就一些具体的多面体，计算了它们各个维数的同调群. 这些计算，可以说因题而异. 于是自然就产生一个问题，有无一个统一的办法来计算多面体的同调群，下面我们就来解决这个问题.

在叙述如何计算同调群以前，先得把给定一个多面体的确切含义弄清楚.

给定一个多面体 (或者一个可剖分空间), 意思是说, 它有一个单纯剖分 (或者曲单纯剖分). 有了这个单纯剖分, 我们就有各个维数的基本组, 从而就可以构作链群和链群之间的边缘同态.

有了边缘同态, 就可算它的核 (闭链群) 和像 (边缘群), 而核模像所得的商群便是同调群.

所以算同调群, 可以假定给了链群和边缘同态.

已知, 基本组构成链群的基, 而关联矩阵 (参见 (1.25)) 反映了边缘同态在这组基上的作用.

如果关联矩阵 (∂_k) 是 "对角形" 的话 (图中未标明的元素均为 0), 那么 $\mathrm{Ker}\partial_k$ 和 $\mathrm{Im}\partial_k$ 就很容易决定了. 实际上, 这时 $\{\sigma^k_{m_k+1}, \cdots, \sigma^k_{\varphi_k}\}$ 为 $\mathrm{Ker}\partial_k$ 的基, 而 $\{r_1\sigma^{k-1}_1, \cdots, r_{m_k}\sigma^{k-1}_{m_k}\}$ 为 $\mathrm{Im}\partial_k$ 的基. 不过, 一般来讲, (∂_k) 并不是这种 "对角形".

	σ^{k-1}_1	$\cdots$	$\sigma^{k-1}_{m_k}$	$\cdots$	$\sigma^{k-1}_{\varphi_{k-1}}$
σ^k_1	r_1				
$\vdots$		$\ddots$			
$\sigma^k_{m_k}$			r_{m_k}		
$\vdots$					
$\sigma^k_{\varphi_k}$					

在线性代数里面, 我们知道, 同一个线性变换在线性空间的不同的基之下, 它所对应的矩阵不同. 但只要适当的选取基, 对应的矩阵会有某种最简单的形状 (如 Jordan 标准型). 在我们的情形, 关联矩阵虽然一般不具有我们所要的 "对角形", 可它只是边缘同态 ∂_k 在链群的特殊基 —— 基本组 $\{\sigma^k_1, \cdots, \sigma^k_{\varphi_k}\}$ 和 $\{\sigma^{k-1}_1, \cdots, \sigma^{k-1}_{\varphi_{k-1}}\}$ 之下所对应的矩阵. 有可能取别的适当的基以后, ∂_k 所对应的矩阵, 会呈 "对角形".

下面我们就来证明这一点.

在进入正式证明之前, 我们注意, 关联矩阵是一个整数矩阵. 因此我们先来对整数矩阵做些讨论.

5.1　定义　设 M 是一个整数矩阵. 对矩阵 M 施行的下列四种运算叫 **初等运算**:

1. i 行加到 j 行去;

2. 改变第 i 行的符号;

1′. i 列加到 j 列去;

2′. 改变第 j 列的符号.

5.2　定义　两个整数矩阵 M 和 N 叫做等价, 如果 M 经有限次初等运算后变成 N.

显然, 整数矩阵间的这个关系是一个等价关系.

5.3　命题　重复使用初等运算, 可以

3. 行互换;

4. i 行乘上整数倍加到 j 行去;

3′. 列互换;

4′. i 列乘上整数倍加到 j 列去.

证明　只证 3, 其它的请读者自行补出.

为了将 i 行和 j 行互换,

第一步用 1, 将 i 行加到 j 行去;

第二步用 2, 改变 i 行的符号;

第三步用 1, 将 j 行加到 i 行去;

第四步用 2, 将 i 行改号;

第五步用 1, 将 i 行加到 j 行去;

第六步用 2, 改变 i 行符号.　◁

5.4　定理　整数矩阵 M 等价于"对角形"整数矩阵

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_k & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

其中 k 为 M 的秩, d_i 为正整数, 又 d_i 整除 $d_{i+1}, i = 1, \cdots, k-1, d_1, \cdots, d_k$ 叫做不变因子, 完全由 M 决定.

证明 若 M 的秩为 0, 那么结论显然成立. 故以下设秩 $k>0$.

由于秩 $k>0$, 故 M 中有非 0 元 a_{11}, 这个元经行、列对换后, 总可设它在 $(1,1)$ 处 [1].

利用初等运算, 总可假定, a_{11} 可以除尽第一行和第一列中的所有元素. 实际上, 若 $(1,l)$ 处的元 a_{1l} $(\neq 0)$ 不能被 a_{11} 整除. 记其余数为 r. 则用初等运算适当次 (参见 (5.3)), 可设 $(1,l)$ 处的元为 r. 再经列的对换, 可设 r 在 $(1,1)$ 处. 显然, 这一作法对第一列的元素也可实行. 因此, 如果第一行或第一列中, 有元素不能被 a_{11} 整除, 那么用初等运算若干次后, 总可假定 (1,1) 处的元为 r, 而 $0<r<|a_{11}|$. 由于 (1,1) 处的元每这样换一次, 绝对值都要变小. 因此, 换有限次后, $(1,1)$ 处的元可以整除第一行和第一列中的所有元素. 于是再用 4. $(4')$, 不妨设第一行和第一列中的元, 除 $(1,1)$ 处外均为 0, 而 $(1,1)$ 处的元不妨仍记为 a_{11}. 这样, 我们得到如下的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}.$$

如果 M' 中有某个元素 $a_{ij}(i,j>1)$ 不能被 a_{11} 整除. 那么用 1 将 i 行加到第一行去, 再应用上面的步骤, 将 a_{11} 的绝对值换小. 于是经过有限次以后, 我们就得到这样一个矩阵:

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix},$$

其中 $d_1>0$, 而且 M_1 中的元均可被 d_1 整除. 命

$$M_1 = d_1 M_1'$$

现在我们对矩阵 M 的行数做归纳法.

---

1) 一般, (i,j) 处, 表示 i 行 j 列位置.

如果 M 只有一行，结论已成立.

设 M 的行数 $< n$ 时定理成立. 下面考虑行数为 n 的矩阵 M.

按上面所述，M 等价于

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_1 M_1' \end{pmatrix}. \tag{1}$$

这里 M_1' 的行数为 $n-1$. 按归纳假定，M_1' 等价于“对角形”矩阵

$$\begin{pmatrix} d_2' & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_k' & \\ & & & \\ \end{pmatrix},$$

其中 $k-1$ 为 M_1' 的秩，$d_2', \cdots, d_k'$ 均为正整数，而且 d_i' 整除 $d_{i+1}', i=2,\cdots,k-1$.

注意 M_1' 的初等运算可自然地看做 (1) 的初等运算，而且对 (1) 施行的这种初等运算，保持第一行和第一列不变. 于是 (1)，因此 M, 等价于

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_k & \\ & & & & \\ \end{pmatrix},$$

其中 $d_i = d_1 d_i', i=2,\cdots,k$, 于是 d_i 整除 $d_{i+1}, i=1,\cdots,k-1$.

至于 d_i 由矩阵 M 决定，只要注意初等运算不改变行列式的绝对值，而

$$d_i = \frac{D_i}{D_{i-1}}, \quad i=1,\cdots,k,$$

这里 D_i 为 M 中 i 阶行列式的最大公因子，$i=1,\cdots,k$, 而 $D_0=1$. ◁

有了以上的准备，我们就可以证明

5.5　定理　适当选取 $C_k(K)$ 和 $C_{k-1}(K)$ 的基，边缘同态 $\partial_k : C_k(K) \to C_{k-1}(K)$ 所对应的矩阵是"对角形"

$$\begin{pmatrix} \tau_1^k & & & \\ & \ddots & & \\ & & \tau_{m_k}^k & \\ & & & \\ \end{pmatrix} \tag{2}$$

其中 m_k 为矩阵 (∂_k) 的秩，$\tau_1^k, \cdots, \tau_{m_k}^k$ 为不变因子．它们完全由 ∂_k 决定，与基的选取无关．

证明　这只要注意初等运算相当于基中某些元的改变，而且改变后仍为基．如初等运算 1. 相当于 $C_k(K)$ 的基中第 j 个元用第 i 个元加第 j 个元的和来代替．所以，例如说，从关联矩阵 (∂_k) 出发，由 (5.4)，它经有限次初等运算的作用后，变成"对角形"(2) 的样子．而每做一次初等运算，就相当于换 $C_k(K)$ 或 $C_{k-1}(K)$ 的基．所以，在适当选取的基之下，边缘同态 ∂_k 所决定的矩阵呈 (2) 的形状．由 (5.4)"对角形"矩阵 (2) 中的秩和不变因子完全由 (∂_k) 决定，而 (∂_k) 完全由 ∂_k 决定．故定理得证．　◁

¡　定理 (5.5) 已经为我们提供了闭链群 $Z_k(K) = \mathrm{Ker}\partial_k$ 和边缘链群 $B_{k-1}(K) = \mathrm{Im}\partial_k$ 的基．这样似乎同调群 $H_k(K) = Z_k(K)/B_k(K)$ 已可算出．但仔细一检查，将会发现，"对角形"(2) 提供的信息，一半是关于 $H_k(K)$ 的 (即 $Z_k(K)$ 部分)，一半是关于 $H_{k-1}(K)$ 的 (即 $B_{k-1}(K)$ 部分)．但不论是关于 $H_k(K)$ 部分，或者关于 $H_{k-1}(K)$ 部分，都不足以决定整个的 $H_k(K)$ 或 $H_{k-1}(K)$．原因是，对于使 (∂_k) 有"对角形"的 $C_{k-1}(K)$ 的基，并不一定与使 (∂_{k-1}) 有"对角形"的基一致．因此，对于从 (∂_{k-1}) 的"对角形"所求得的 $Z_{k-1}(K)$ 的基，与从 (∂_k) 的"对角形"所求得的 $B_{k-1}(K)$ 的基，彼此之间关系不清楚，这样就无法决定 $H_{k-1}(K)$．所以为了算出 $H_{k-1}(K)$，还得作进一步的工作．

上面已经讲了，当前的困难是使 (∂_k) 和 (∂_{k+1}) 有"对角形"

的 $C_k(K)$ 的基不一定一致. 那么可否取这样的基, 使得用了它以后, 可同时使 (∂_k) 和 (∂_{k+1}) 呈 "对角形" 呢? 答案是肯定的, 下面就来实现这一步.

我们从头开始.

现在选取 $C_{k+1}(K)$ 和 $C_k(K)$ 的基 $\{c_1^{k+1},\cdots,c_{m_{k+1}}^{k+1},z_1^{k+1},\cdots,z_{\varphi_{k+1}-m_{k+1}}^{k+1}\}$ 和 $\{c_1^k,\cdots,c_{m_{k+1}}^k,z_1^k,\cdots,z_{\varphi_k-m_{k+1}}^k\}$ 使 ∂_{k+1} 所决定的矩阵为 "对角形"(由 (5.5), 这可办到)

	c_1^k	$\cdots$	$c_{m_{k+1}}^k$	z_1^k	$\cdots$	$z_{\varphi_k-m_{k+1}}^k$
c_1^{k+1}	τ_1^{k+1}					
$\vdots$		$\ddots$				
$c_{m_{k+1}}^{k+1}$			$\tau_{m_{k+1}}^{k+1}$			
z_1^{k+1}						
$\vdots$						
$z_{\varphi_{k+1}-m_{k+1}}^{k+1}$						

(3)

任取 $C_{k-1}(K)$ 的基 $\{c_1^{k-1},\cdots,c_{\varphi_{k-1}}^{k-1}\}$, 这时设 ∂_k 所对应的矩阵为

	c_1^{k-1}	$\cdots$	$c_{\varphi_{k-1}}^{k-1}$
c_1^k	α_{11}	$\cdots$	$\alpha_{1,\varphi_{k-1}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$z_{\varphi_k-m_{k+1}}^k$	$\alpha_{\varphi_k-m_{k+1},1}$		$\alpha_{\varphi_k-m_{k+1},\varphi_{k-1}}$

为了将上述矩阵 "对角化", 我们要对上述矩阵施行初等运算, 亦即改变 $C_k(K)$ 和 $C_{k-1}(K)$ 的基. 可是改变 $C_k(K)$ 的基时, 上述矩阵虽然可以 "对角化" 了, 但已经 "对角化" 了的 (3), 却可能变成非 "对角形" 了. 也就是说要 "顾此失彼". 有无什么 "两全其美" 的办法呢?

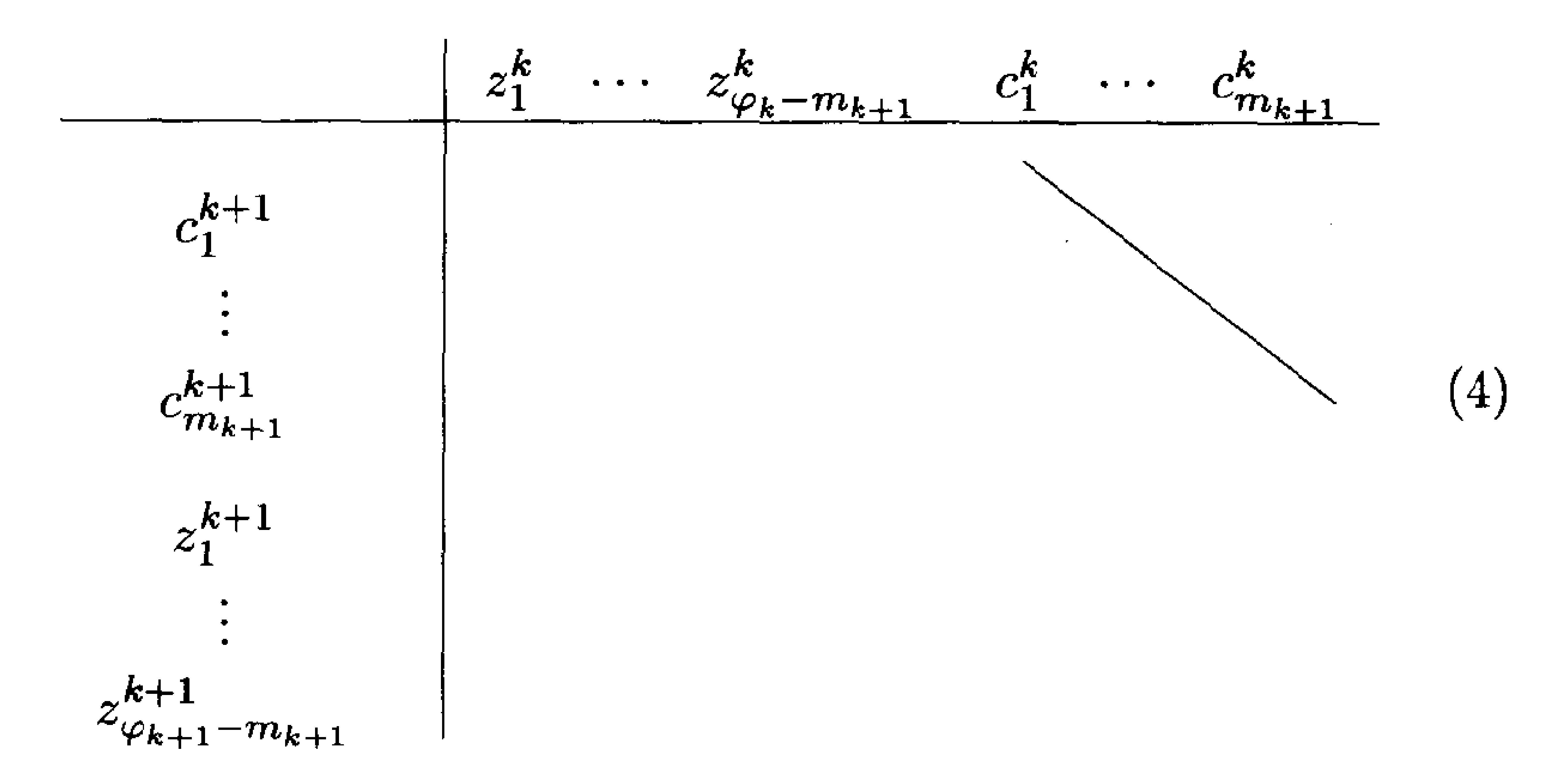
为此，我们指出由于边缘同态之间存在着如下的关系：

$$\partial_k \partial_{k+1} = 0.$$

(参见 (1.26)) 因此对于 $C_{k+1}(K), C_k(K)$ 和 $C_{k-1}(K)$ 的基，$\partial_{k+1}, \partial_k$ 所对应的矩阵 M_{k+1} 和 M_k 之间也有关系

$$M_{k+1} M_k = 0.$$

因此如果我们将“对角形”矩阵 (3) 换个样子，改成

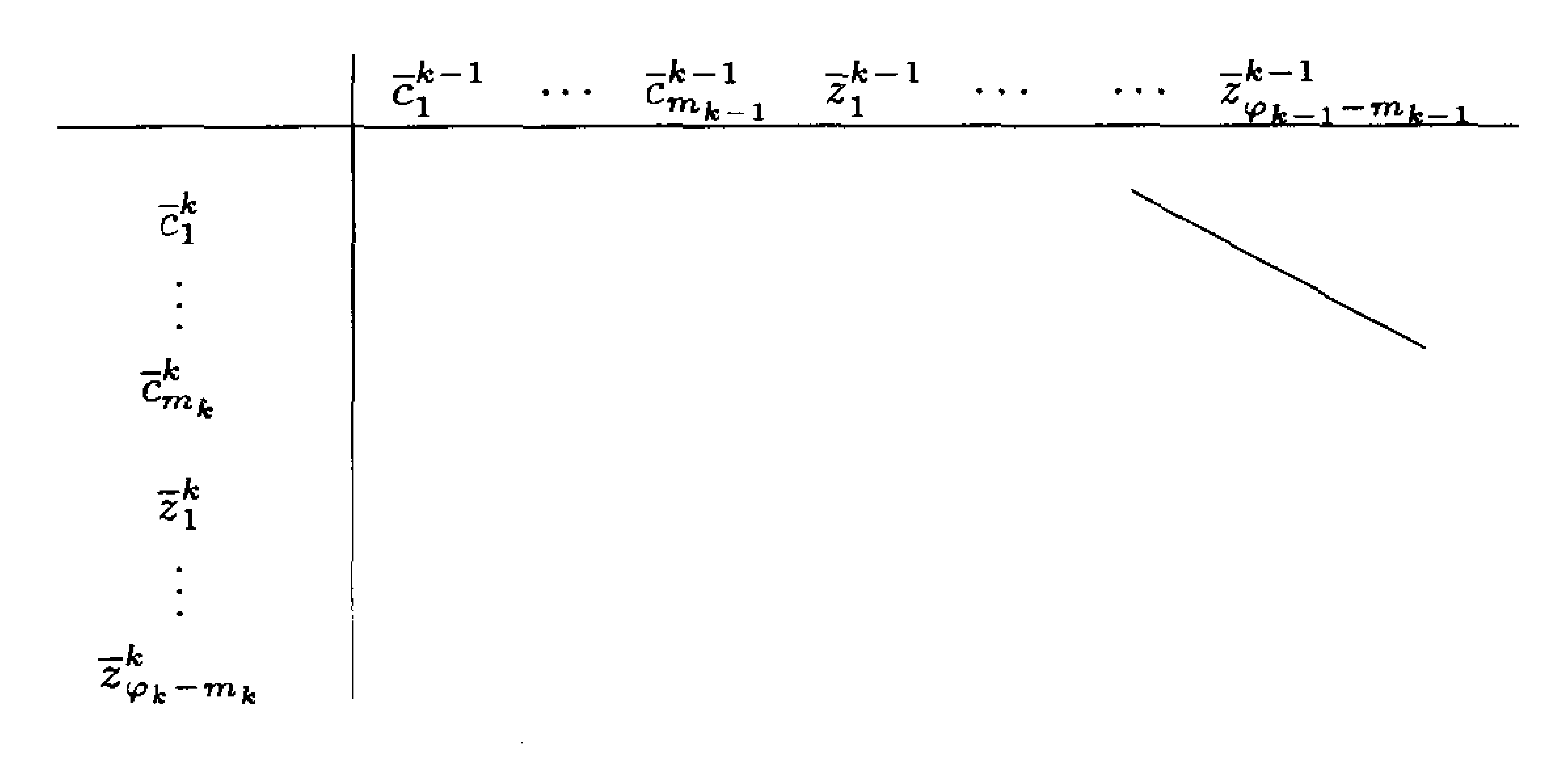


(4)

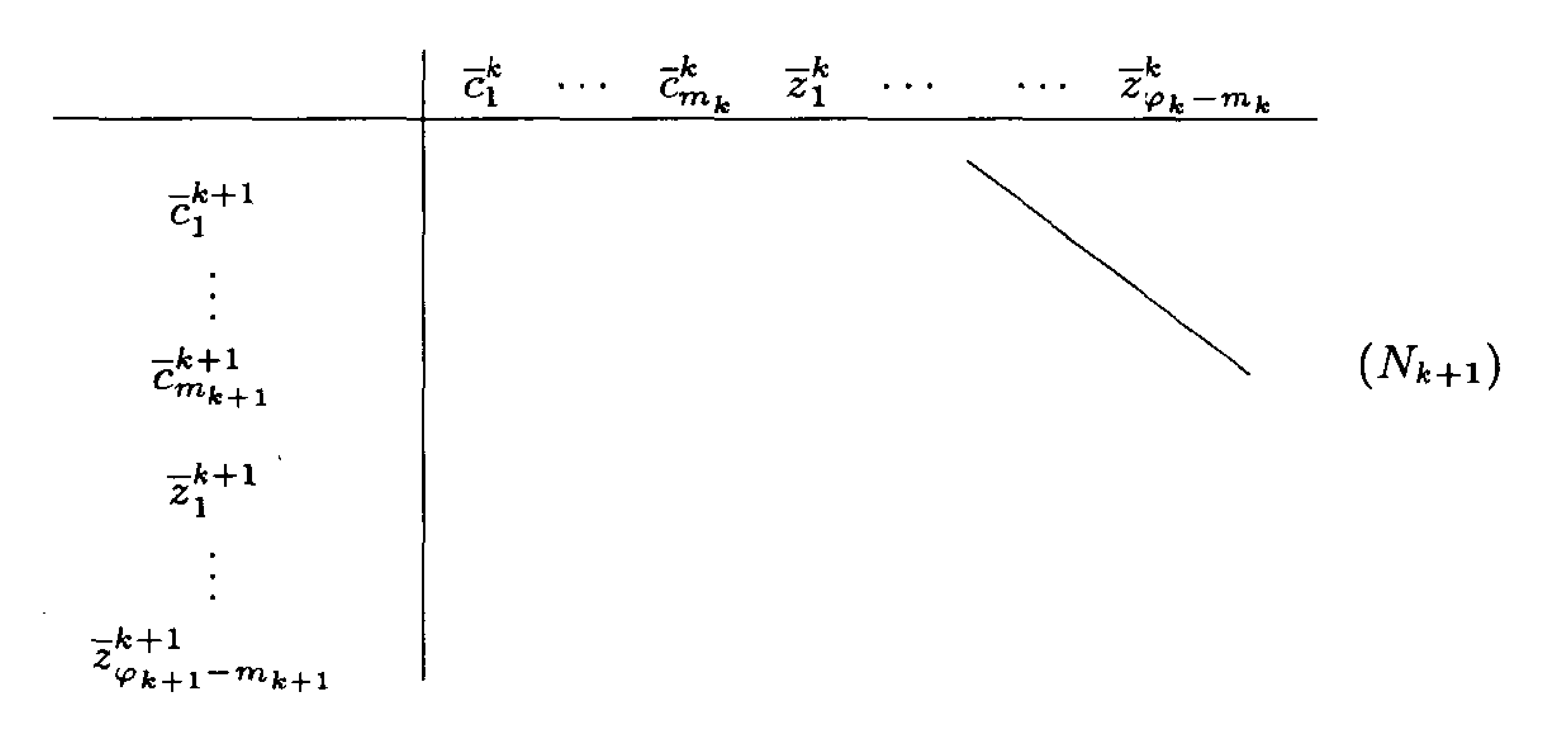
(在上图中，右上角对角线上的元素非 0，但因为它们的数值不重要，故未标明). 那么由于矩阵方程 $M_{k+1} M_k = 0$，知 M_k 呈下形

$$\begin{array}{c|ccc}
 & c_1^{k-1} & \cdots & c_{\varphi_{k-1}}^{k-1} \\
\hline
z_1^k & & & \\
\vdots & & & \\
z_{\varphi_k - m_{k+1}}^k & & & \\
c_1^k & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{m_{k+1}}^k & 0 & \cdots & 0
\end{array}$$

即，后 m_{k+1} 行均为 0. 对于这样的特殊矩阵，可用一些特殊的初等运算将其变成 (4) 的形状. 注意，这时所用的特殊初等运算，不改变后 m_{k+1} 行，因此 (4) 的形状不受影响 (即 $C_k(K)$ 的基中，$z_1^k, \cdots, z_{\varphi_k - m_{k+1}}^k$ 虽有变动，但 $c_1^k, \cdots, c_{m_{k+1}}^k$ 不变化). 设 M_k 最后变为



($\bar{z}_1^k, \cdots, \bar{z}_{\varphi_k - m_k}^k$ 的后 m_{k+1} 个为 $c_1^k, \cdots, c_{m_{k+1}}^k$.) 这时 M_{k+1} 的"形状"虽然未变，但基有变化，设为



(N_{k+1})

由此就很容易将 $H_k(K)$ 写出.

有了以上的准备，现在我们可以来证明

5.6 定理 对于 n 维复形 K, 链群 $C_k(K)$ 的基可取为

$$\left.\begin{array}{ll} a_i^k, & i=1,\cdots,l_{k-1}, \\ b_i^k, & i=1,\cdots,\theta_{k-1}, \\ u_i^k, & i=1,\cdots,\beta_k, \\ v_i^k, & i=1,\cdots,l_k, \\ w_i^k, & i=1,\cdots,\theta_k, \end{array}\right\} \quad k=0,1,\cdots,n.$$

(其中 $l_n=\theta_n=0$, 即 v_i^n 和 w_i^n 不出现; 又 $l_{-1}=\theta_{-1}=\theta_0=0$, 即 a_i^0, b_i^0, w_i^0 和 b_i^1 也不出现) 它们在边缘同态 ∂_k 下的像为

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_k a_i^k = v_i^{k-1}, & i=1,\cdots,l_{k-1}, \\ \partial_k b_i^k = \tau_i^{k-1} w_i^{k-1}, & i=1,\cdots,\theta_{k-1}, \\ \partial_k u_i^k = 0, & i=1,\cdots,\beta_k, \\ \partial_k v_i^k = 0, & i=1,\cdots,l_k, \\ \partial_k w_i^k = 0, & i=1,\cdots,\theta_k, \end{array}\right\} \quad k=1,\cdots,n.$$

这里 $\tau_1^k,\cdots,\tau_{\theta_k}^k$ 为关联矩阵 (∂_{k+1}) 的大于 1 的诸不变因子, $\alpha_k = l_k+\theta_k$ 为 (∂_{k+1}) 的秩 [1], $\beta_k=\varphi_k-(\alpha_k+\alpha_{k-1}) = \varphi_k-(l_k+\theta_k+l_{k-1}+\theta_{k-1})$.

证明 我们从关联矩阵 (∂_n) 开始. 根据上面所说的理由, 它等价于

	$\overline{C}^{n-1}$	$\overline{Z}^{n-1}$
$\overline{C}^n$		$\diagdown$
$\overline{Z}^n$		

(N_n)

1) 这里 φ_k 表示 K 的 k 维单形数.

而且 (∂_{n-1}) 等价于

$$\begin{array}{c|cc} & \overline{C}^{n-2} & \overline{Z}^{n-2} \\ \hline \overline{C}^{n-1} & & \diagdown \\ \overline{Z}^{n-1} & & \end{array} \qquad (N_{n-1})$$

在此基础上，重复上面的讨论，可使 (∂_{n-2}) 等价于

$$\begin{array}{c|cc} & \overline{C}^{n-3} & \overline{Z}^{n-3} \\ \hline \overline{C}^{n-2} & & \diagdown \\ \overline{Z}^{n-2} & & \end{array} \qquad (N_{n-2})$$

这时，(N_{n-1}) 中的 $\overline{C}^{n-2}$ 可能要做些调整. 但不论是在 (N_{n-1}) 中，还是在 (N_{n-2}) 中，它们一致，因此我们仍采用同一记号 $\overline{C}^{n-2}$(上面已经说了，在使 (∂_{n-2})“对角化”时，对 $\overline{C}^{n-2}$ 所做的调整，不影响已经对角化了的 (N_{n-1})).

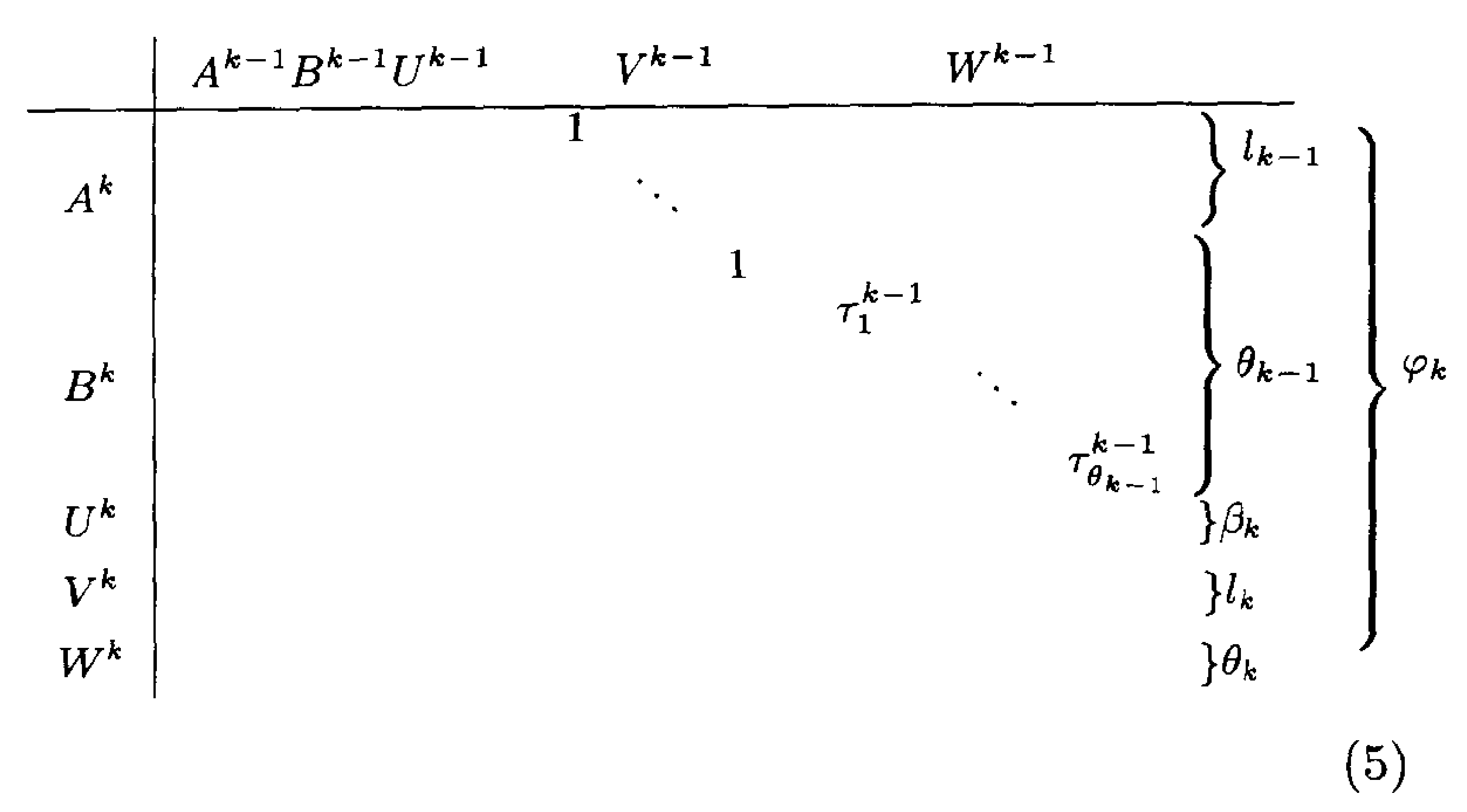
一般，可使 (∂_k) 等价于

$$\begin{array}{c|cc} & \overline{C}^{k-1} & \overline{Z}^{k-1} \\ \hline \overline{C}^{k} & & \diagdown \\ \overline{Z}^{k} & & \end{array} \qquad (N_{k})$$

现在，按 (N_k) 中的不变因子是否为 1, 将 $\overline{C}^k$ 和 $\overline{Z}^{k-1}$ 中的元各分成两和三部分: $\overline{C}^k$ 中相应于 1 的记为 $a_1^k,\cdots,a_{l_{k-1}}^k$，非 1 的记为 $b_1^k,\cdots,b_{\theta_{k-1}}^k$; $\overline{Z}^{k-1}$ 中相应于为 1 的记作 $v_1^{k-1},\cdots,v_{l_{k-1}}^{k-1}$，非 1 的记作 $w_1^{k-1},\cdots,w_{\theta_{k-1}}^{k-1}$，余下的记为 $u_1^{k-1},\cdots,u_{\beta_{k-1}}^{k-1}$.

注意，(∂_{n+1}) 为 0 矩阵，故 $l_n=\theta_n=0$. 又 (∂_0) 也是 0 矩阵，因此 $l_{-1}=\theta_{-1}=0$. 另外，由于 (∂_1) 中每一行恰有两个元素非 0，而且其值一个是 1，另一个是 (-1). 由此可以证明它没有 >1 的不变因子 (为什么？). 因此 $\theta_0=0$，于是 b_i^1 和 w_i^0 不出现. ◁

¡ 当链群 $C_k(K)$ 都采用上述基后，边缘同态 $\partial_k: C_k(K)\to C_{k-1}(K)$ 所决定的矩阵有如下的形状:



(5)

5.7 推论 对于 n 维复形 K, 如果它的 k 维单形数为 φ_k, 关联矩阵 (∂_{k+1}) 的秩为 $\alpha_k, \tau_1^k, \cdots, \tau_{\theta_k}^k$ 是它的 >1 的全部不变因子, 那么

$$H_k(K) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\beta_k} \oplus \mathbb{Z}/\tau_1^k \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\tau_{\theta_k}^k, \quad k = 1, \cdots, n-1,$$

$$H_k(K) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\beta_k}, \quad k = 0, n,$$

其中 $\beta_k = \varphi_k - \alpha_k - \alpha_{k-1}$.

证明 这由上面的矩阵立知. ◁

至此, 我们利用关联矩阵, 已将同调群全部算出.

5.8 定义 上述 β_k 叫做 K 的第 k 个 Betti 数, $\tau_1^k, \cdots, \tau_{\theta_k}^k$ 叫做 K 的 k 维挠系数.

¡ Betti 数 $\beta_k = \varphi_k - \alpha_k - \alpha_{k-1}$, 而 α_k, α_{k-1} 分别为矩阵 (∂_{k+1}) 和 (∂_k) 的秩. 即 β_k 和 ∂_{k+1} 及 ∂_k 有关. 但挠系数 $\tau_1^k, \cdots, \tau_{\theta_k}^k$ 为矩阵 (∂_{k+1}) 的 >1 的全部不变因子. 即, k 维挠系数由 ∂_{k+1} 决定, 与 ∂_k 无关!

¡ (5.7) 是 (5.6) 的推论. 即, (5.7) 将群 $H_k(K)$ 的代数结构完全确定了下来. 但 (5.6) 提供的信息更多一些, 即, 它不仅提供了群 $H_k(K)$ 的代数结构, 而且为各维同调类提供了它的 (几

何) 代表链.

5.9 定义 n 维复形 K 的 Euler示性数

$$\chi(K)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k,$$

其中 φ_k 为 K 的 k 维单形数.

5.10 定理 复形 K 的 Euler 数与诸 Betti 数间有关系

$$\chi(K)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\beta_k.$$

证明 由 (5.7), 我们有

$$\beta_k=\varphi_k-\alpha_k-\alpha_{k-1}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\beta_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\varphi_k-\alpha_k-\alpha_{k-1})\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k.\end{aligned}$$ ◁

¡ 由于同一个多面体 $|K|$ 可以有不同的剖分, 而不同的剖分, 单形数就会不一样. 于是 Euler 示性数的各项就会变动. 但定理 (5.10) 告诉我们, 这个数不仅不变, 而且是个拓扑不变量 (当然, 这时要假定同调群是拓扑不变的. 这一点以后将证明).

下面我们来考虑同调群和上同调群之间的关系.

按定义, 上同调群是用上边缘同态 δ^{k-1} 来定义的. 而且引进上链群 $C^k(K)=\mathrm{Hom}(C_k(K),\mathbb{Z})$ 以后, 上边缘同态 δ^{k-1} 就是边缘同态 ∂_k 的对偶. 特别, 在取定 $C_k(K)$ 和 $C_{k-1}(K)$ 的基以后, 在 $C^k(K)$ 和 $C^{k-1}(K)$ 中取对偶基的话, ∂_k 所决定的矩阵与 δ^{k-1} 所决定的矩阵互为转置 (参见 §4.(5)). 注意到这一点, 我们就可以利用 (5) 来证明.

5.11　定理　对于 n 维复形 K, 上链群 $C^k(K)$ 的基可取为

$$\left.\begin{array}{ll} f_i^k, & i=1,\cdots,l_{k-1}, \\ g_i^k, & i=1,\cdots,\theta_{k-1}, \\ \xi_i^k, & i=1,\cdots,\beta_k, \\ \lambda_i^k, & i=1,\cdots,l_k, \\ \omega_i^k, & i=1,\cdots,\theta_k, \end{array}\right\} \quad k=0,1,\cdots,n.$$

(其中 $l_n=\theta_n=0$, 即 λ_i^n 和 ω_i^n 不出现; 又 $l_{-1}=\theta_{-1}=\theta_0=0$, 即 f_i^0,g_i^0,ω_i^0 和 g_i^1 也不出现). 它们在上边缘同态 δ^k 下的像为

$$\left.\begin{array}{ll} \delta^k f_i^k=0, & i=1,\cdots,l_{k-1}, \\ \delta^k g_i^k=0, & i=1,\cdots,\theta_{k-1}, \\ \delta^k \xi_i^k=0, & i=1,\cdots,\beta_k, \\ \delta^k \lambda_i^k=f_i^{k+1}, & i=1,\cdots,l_k, \\ \delta^k \omega_i^k=\tau_i^k g_i^{k+1}, & i=1,\cdots,\theta_k, \end{array}\right\} \quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

这里 $\tau_1^k,\cdots,\tau_{\theta_k}^k$ 为上边缘同态 δ^k 所决定的矩阵 (δ^k)(即关联矩阵 $(\partial_{k+1})^T$) 的大于 1 的诸不变因子, $\alpha_k=l_k+\theta_k$ 为它的秩, $\beta_k=\varphi_k-(\alpha_k+\alpha_{k-1})=\varphi_k-(l_k+\theta_k+l_{k-1}+\theta_{k-1})$[1].

证明　对 $C_k(K)$ 和 $C_{k+1}(K)$ 分别取基 A^k,B^k,U^k,V^k 和 W^k, 以及 A^{k+1},B^{k+1}, U^{k+1},V^{k+1} 和 W^{k+1} 以后, 边缘同态 $\partial_{k+1}:C_{k+1}(K)\to C_k(K)$ 所决定的矩阵呈 (5) 形状.

现在在 $C^k(K)$ 和 $C^{k+1}(K)$ 中, 分别取对偶基, 记为 $f_i^k(i=1,\cdots,l_{k-1})$,$g_i^k(i=1,\cdots,\theta_{k-1})$,$\xi_i^k(i=1,\cdots,\beta_k)$,$\lambda_i^k(i=1,$

1) 这里 φ_k 仍为复形 K 的 k 维单形数.

$\cdots,l_k)$ 和 $\omega_i^k(i=1,\cdots,\theta_k)$, 以及 f_i^{k+1},g_i^{k+1}, $\xi_i^{k+1},\lambda_i^{k+1}$ 和 ω_i^{k+1}, 那么 δ^k 所决定的矩阵 $(\delta^k)=(\partial_{k+1})^T$, 即 (δ^k) 有下面的形状

$$\begin{array}{c|ccccccc} & F^{k+1} & & & G^{k+1} & \Xi & \Lambda & \Omega \\ \hline F^k & & & & & & & \\ G^k & & & & & & & \\ \Xi & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ \Lambda & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \tau_1^k & & & \\ \Omega & & & & \ddots & & & \\ & & & & \tau_{\theta_k}^k & & & \end{array} \tag{6}$$

因此定理得证. ◁

5.12 推论 对于 n 维复形 K, 如果它的 k 维单形数为 φ_k, 关联矩阵 (∂_{k+1}) 的秩为 α_k, $\tau_1^k,\cdots,\tau_{\theta_k}^k$ 是它的 >1 的全部不变因子, 那么

$$H^k(K)=\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{\beta_k}\oplus\mathbb{Z}/\tau_1^{k-1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/\tau_{\theta_{k-1}}^{k-1},\quad k=0,\cdots,n.$$

(注意, $\theta_{-1}=\theta_0=0$, 所以 $H^0(K)$ 和 $H^1(K)$ 都是自由群.)

证明 根据上面的定理, 选取适当的基以后, 上边缘同态 δ^k 所决定的矩阵呈 (6) 形状. 于是立知

$$Z^k(K)=\text{以 }\{f_i^k,g_i^k,\xi_i^k\}\text{ 为基的自由群},$$

又

$$B^k(K)=\text{以 }\{f_i^k,\tau_i^{k-1}g_i^k\}\text{ 为基的自由群},$$

因此

$$\begin{aligned}H^k(K)\ &=\text{以 }\{\xi_i^k\}\text{ 为基的自由群}\\ &\qquad\oplus\sum\text{ 以 }g_i^k\text{ 为母元的 }\tau_i^{k-1}\text{ 阶循环群.}\end{aligned}$$

所以推论成立. ◁

5.13 定理 复形 K 的同调群和上同调群之间，存在着如下的关系：

1) $H_k(K)$ 和 $H^k(K)$ 具有相同的自由群部分；

2) $H_k(K)$ 和 $H^{k+1}(K)$ 具有相同的有限子群部分.

证明 由 (5.7) 和 (5.12) 知

1) $H_k(K)$ 和 $H^k(K)$ 的自由部分都是秩为 β_k 的自由群，

2) $H_k(K)$ 和 $H^{k+1}(K)$ 的有限子群，都是 $\mathbb{Z}/\tau_1^k\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/\tau_{\theta_k}^k$.

◁

¡ 定理 (5.13) 阐明了同调群和上同调群之间的关系. 特别，复形 K 的上同调群完全由它的同调群所决定 (当然，反过来也对). 因此，似乎有了同调群就没有必要再引进上同调群了.

的确，上同调群是可以由同调群来决定. 但是，前面已经说过，在许多场合，采用上同调的语言，比之用同调更为自然和方便. 实际上，以后我们还将把各个维数的上同调类组织在一起，从而可以由上同调群过渡到上同调环去. 并且还将证明，上同调环也是拓扑不变的. 由于环较之群多了一个代数运算，因此代数结构要复杂许多. 这样，在同调群 (上同调群) 相同，无法区分两个空间是否同胚时，可以进一步考虑它们的上同调环. 如果做为环，它们不同构，那么仍可得到两个空间不同胚的结论. 因此，单从这一点讲，引进上同调也是有意义的. 实际上，历史上上同调就是和上同调环一起出现的.

§6. 制造新复形

正如复形是由简单的图形 —— 单形构成那样. 我们在有了一个复形以后，很自然地会希望，由此出发看能构成一些什么样的新复形. 并研究新复形和老复形之间有些什么关系.

下面我们介绍几种运算. 这些运算将使我们从已知复形得到新复形.

为了获得复形，我们仔细观察一下复形的定义就会发现，复形实际上完全由其顶点和顶点构成的子集组 (单形) 所决定．当然，这时顶点的子集组要适合某种条件．

6.1　定义　以有限个元素 $c_0, c_1, \cdots, c_k$ 的子集做为元素所得的集 $\mathbb{K}$, 叫做以 $c_0, c_1, \cdots, c_k$ 为顶点的 **抽象复形**, 如果以下两个条件满足：

1) 由单个元素 c_i 所组成的子集属于 $\mathbb{K}$, 这里 $i = 0, 1, \cdots, k$;

2) 若 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{K}$ 的元，则 $\mathbb{A}$ 的子集也是 $\mathbb{K}$ 的元．

抽象复形 $\mathbb{K}$ 中的元 $\mathbb{A}$ 叫做 **抽象单形**, 它的维数是其顶点数减 1. $\mathbb{A}$ 的子集叫做 $\mathbb{A}$ 的面．$\mathbb{K}$ 的维数是 $\mathbb{K}$ 中诸抽象单形的最大维数．

显然，每个复形 K 都自然地决定一个抽象复形 $\mathbb{K}$ [1)]．实际上，K 的每个单形 $(a_0 a_1 \cdots a_k)$ 规定 $\mathbb{K}$ 的一个抽象单形 $(c_0 c_1 \cdots c_k)$. 这样规定的 $\mathbb{K}$, 显然是一个抽象复形．我们称 K 为 $\mathbb{K}$ 的一个 **几何实现**.

¡　粗粗一看，似乎抽象复形只是复形的一般化、抽象化，没有什么大意义．实际上，和任何有意义的"抽象"一样，它一经提炼出来，会有更大的概括性和指导意义．

下面是得到抽象复形的另一个例子．

6.2　例　设 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ 是拓扑空间 X 的一个有限开覆盖．现在利用 $\mathcal{U}$ 来决定一个抽象复形 $\mathbb{K}_\mathcal{U}$ 如下：U_α 对应于 $\mathbb{K}_\mathcal{U}$ 的顶点 c_α. 顶点集 $c_{\alpha_0}, \cdots, c_{\alpha_k}$ 决定 $\mathbb{K}_\mathcal{U}$ 的一个抽象单形，当且仅当 $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k} \neq \phi$. 这个抽象复形 $\mathbb{K}_\mathcal{U}$ 叫做开覆盖 $\mathcal{U}$ 的 **脉络**. 它在 Čech 同调理论中起基本的作用．

上面已经讲了，从复形 K 可以得到抽象复形 $\mathbb{K}$. 现在考虑它的反问题，即：给了抽象复形 $\mathbb{K}$ 以后，它有无几何实现．答案是

---

1) 这里，一个的意思是指"同构"意义下唯一，请读者自行补出两个抽象复形为"同构"的意义．

肯定的，而且并不困难. 实际上，我们有

6.3 定理 设 $c_0, c_1, \cdots, c_k$ 为抽象复形 $\mathbb{K}$ 的顶点，那么在 E^{k+1} 中，它有几何实现 K. K 还可取为某个 A^k 的子复形.

证明 让 $e_i = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{i}, 1, 0, \cdots, 0)$ 和 c_i 对应.

显然， $e_0, e_1, \cdots, e_k$ 是 E^{k+1} 中的仿射无关点组，因此决定一个单形 A^k. 现在让 A^k 的面 $B^r = (e_{i_0} \cdots e_{i_r})$ 和抽象单形 $\mathbb{B} = (c_{i_0}, \cdots, c_{i_r})$ 对应. 那么由抽象复形的定义 (6.1)，立知 $K = \{B^r\}$ 是复形，而且它还是 $\mathbb{K}$ 的一个几何实现. ◁

¡ 上述几何实现 K 所在的欧氏空间 E^{k+1}，其维数 $(k+1)$ 依赖于 $\mathbb{K}$ 的顶点数. 一般均较大. 以下的定理，在欧氏空间的维数方面是一个显著的改进.

6.4 定理 n 维抽象复形 $\mathbb{K}$ 一定可以在 E^{2n+1} 中实现，即在 E^{2n+1} 中有复形 K，它所决定的抽象复形就是 $\mathbb{K}$.

证明 设 $c_0, c_1, \cdots, c_k$ 为 $\mathbb{K}$ 的顶点. 用 P^s 表示 E^{2n+1} 中的点 $(s, s^2, \cdots, s^{2n+1}), s = 0, 1, \cdots, k$. 不难证明， $P^0, P^1, \cdots, P^k$ 中的任意 $(2n+2)$ 个点都是仿射无关的. 实际上，如果 $P^{s_1}, \cdots, P^{s_{2n+2}}$ 相关，那么应有不全为 0 的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n+2}$ 使

$$\sum_{i=1}^{2n+2} \lambda_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{2n+2} \lambda_i s_i = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\sum_{i=1}^{2n+2} \lambda_i s_i^{2n+1} = 0.$$

但由该方程的系数行列式为 $\prod_{i<j}(s_i - s_j) \neq 0$，知 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{2n+2} = 0$. 矛盾！

现在让 P^s 和 c_s 对应，$A=(P^{s_0}\cdots P^{s_r})$ 和 $\mathbb{K}$ 中的抽象单形 $\mathbb{A}=(c_{s_0},\cdots,c_{s_r})$ 对应. 由于 $\mathbb{K}$ 的维数是 n, 故 $r\leq n$. 于是 A 的顶点数 $r+1\leq n+1<2n+2$. 故 $P^{s_0},\cdots,P^{s_r}$ 仿射无关. 所以它们在 E^{2n+1} 中决定一个 r 单形. 显然，这时 $K=\{A\}$ 适合复形的条件 1), 下面证明它也适合条件 2), 即对 K 中的任意两个单形 $A=(P^{s_0}\cdots P^{s_r})$ 和 $B=(P^{t_0}\cdots P^{t_s})$, 证明 $A\cap B$ 或为空集，或为它们的一个公共面. 设 $P^{s_0},\cdots,P^{s_r},P^{t_0},\cdots,P^{t_s}$ 中互异的为 $P^{u_0},\cdots,P^{u_v}$, 则 $v\leq r+s+1\leq n+n+1<2n+2$. 于是它们为仿射无关点组，在 E^{2n+1} 中决定一个单形 V. 注意 V 虽不一定属于 K, 但 A 和 B 却都是它的面，于是由 (1.7), 知它们规则相处，即 $A\cap B$ 或为空集，或为它们的一个公共面.

显然, 这样作出的 K 为 $\mathbb{K}$ 的一个几何实现, 因此定理得证. $\lhd$

有例表明, 上述结果不能再改进. 例如, 四维复形 A^4 的 1 维骨架 (所以是 1 维复形) 就不能在平面 $\mathbb{R}^2$ 中实现. 熟悉图论的读者知道，这是所谓 Kuratowski 定理的一个结论，它的另一个断言是: 具有三条对顶线的六边形 (也是 1 维复形) 也不能在平面 $\mathbb{R}^2$ 中实现.

下面我们介绍几种获得新复形的运算.

根据上面所讲的，我们只要能从一个具体的抽象复形出发，得到新的抽象复形，也就可以了.

6.5　定义　设 $\mathbb{K}$ 为抽象复形，那么由 $\mathbb{K}$ 可以做一个新的抽象复形 $\hat{\mathbb{K}}$: $\mathbb{K}$ 的元全是 $\hat{\mathbb{K}}$ 的元，但 $\hat{\mathbb{K}}$ 的顶点要比 $\mathbb{K}$ 的多一个，记为 c, 又集合 $c\mathbb{A}^q=(c,c_{i_0},\cdots,c_{i_q})$ 是 $\hat{\mathbb{K}}$ 的抽象单形，当且仅当 $\mathbb{A}^q=(c_{i_0},\cdots,c_{i_q})$ 是 $\mathbb{K}$ 的抽象单形. 称 $\hat{\mathbb{K}}$ 是以 c 为顶、$\mathbb{K}$ 为底的锥形，有时也记为 $c\mathbb{K}$ ($c\mathbb{K}$ 是抽象复形这一点不难验证).

同样，如果 $(n+1)$ 维复形 $\hat{K}$ 有一个 n 维子复形 K, 它们分别为 $\hat{\mathbb{K}}$ 和 $\mathbb{K}$ 的几何实现，并且 $\hat{K}$ 的顶点 a 和 $\hat{\mathbb{K}}$ 的顶点 c 对应，则称复形 $\hat{K}$ 是以 a 为顶，K 为底的锥形，记为 aK.

¡　锥形 aK 的单形由三部分组成:　1) $(a_{i_0}a_{i_1}\cdots a_{i_k})\in K$, 2) a, 3) $(aa_{i_0}\cdots a_{i_k})$, 其中 $(a_{i_0}a_{i_1}\cdots a_{i_k})\in K$ (图 1.18 为 $n=2$

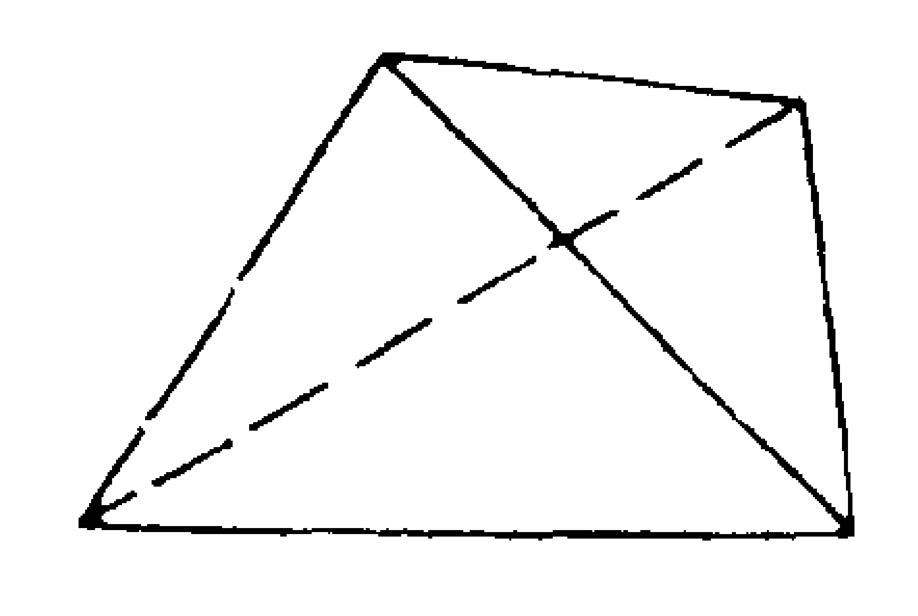


图 1.18

的情形).

¡ 如果抽象复形 $\mathbb{K}$ 可以由 E^m 中的复形 K 实现，那么以 c 为顶的锥形 $c\mathbb{K}$, 可以由 $E^{m+1}(\supset E^m)$ 中的 aK 实现，这里 $a \in E^{m+1}\backslash E^m$. 显然，对 $(a_{i_0}a_{i_1}\cdots a_{i_k}) \in K, (aa_{i_0}\cdots a_{i_k})$ 为单形.

显然，复形 $A^k = (a_0a_1\cdots a_k)$ 是以 a_i 为顶，$A_i^{k-1} = (a_0\cdots \hat{a}_i\cdots a_k)$ 为底的锥形.

6.6 定义 对于给定的抽象复形 $\mathbb{K}$, 先给 $\mathbb{K}$ 的顶点集以序. 设为 $c_0 < c_1 < \cdots < c_k$. 现在对 $\mathbb{K}$ 的每个 s 维抽象单形 $(c_{i_0}, c_{i_1}, \cdots, c_{i_s})$, 设 $c_{i_0} < c_{i_1} < \cdots < c_{i_s}$. 规定 $(s+1)$ 个新的 $(s+1)$ 维抽象单形 $(c_{i_0}^{(0)}, \cdots, c_{i_j}^{(0)}, c_{i_j}^{(1)}, \cdots, c_{i_s}^{(1)}), j = 0, 1, \cdots, s$. 这些抽象单形连同它们的面构成一个新的抽象复形，叫做 $\mathbb{K}$ 的柱形, 记为 $\mathbb{K}\times I$. 显然, $\mathbb{K}\times I$ 的顶点为 $c_0^{(0)}, \cdots, c_k^{(0)}, c_0^{(1)}, \cdots, c_k^{(1)}$.

¡ 如果 $\mathbb{K}$ 由 E^m 中的 K 实现, 那么 $\mathbb{K}\times I$ 可在 $E^{m+1} \supset E^m$ 中实现. 实际上, 对 K 的单形 $(a_0a_1\cdots a_s)$, 以 $a_i^{(\varepsilon)}$ 表示 E^{m+1} 中的点 $(a_i, \varepsilon), \varepsilon = 0, 1$. 那么以 $a_i^{(\varepsilon)}, i = 0, \cdots, s, \varepsilon = 0, 1$ 为顶点, $(a_{i_0}^{(0)}\cdots a_{i_j}^{(0)}a_{i_j}^{(1)}\cdots a_{i_s}^{(1)})$ 及其面为单形的复形就可实现 $\mathbb{K}\times I$. 这个复形记为 $K\times I$, 叫做复形 K 的 **柱形**.

6.7 定义 给定抽象复形 $\mathbb{K} = \{\mathbb{A}_i^k | i = 1, \cdots, \varphi_k; k = 1, \cdots, n\}$. 称抽象复形 $Sd\ \mathbb{K} = \{(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, \cdots, \mathbb{A}_k) | \mathbb{A}_i$ 是 $\mathbb{A}_{i-1}$ 的真子集, $i = 1, \cdots, k\}$ 为 $\mathbb{K}$ 的 **重心重分**. ($Sd\mathbb{K}$ 为抽象复形是显然的).

6.8 定理 若 K 为 $\mathbb{K}$ 的几何实现，那么当 K 的单形序列 $A_0, A_1, \cdots, A_k$ 使 A_i 为 A_{i-1} 的真面时 $(i = 1, \cdots, k)$, 点组

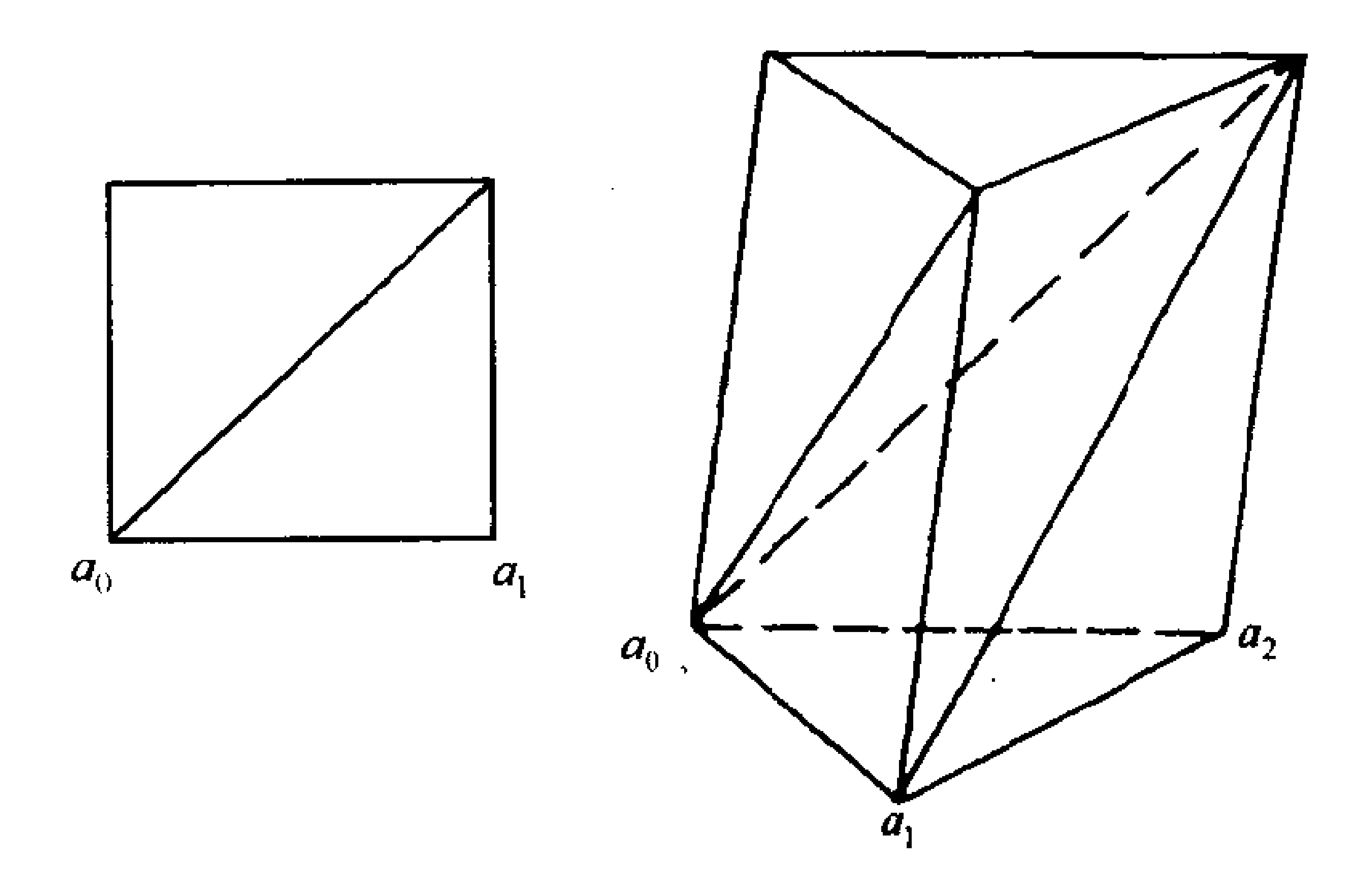


图 1.19

$\overset{*}{A}_0$[1], $\overset{*}{A}_1, \cdots, \overset{*}{A}_k$ 仿射无关，因此它们张成一个单形. 所有这种单形放在一起构成一个复形，记为 $Sd\ K$, 叫做 K 的 **重心重分**. 重心重分 $Sd\ K$ 为 $Sd\ \mathbb{K}$ 的一个几何实现.

证明 只要证明 $Sd\ K$ 是复形就可以了. 它是 $Sd\ \mathbb{K}$ 的几何实现，由 $\mathbb{A}_i^k$ 和 $\overset{*}{A}{}_i^k$ 的对应即知.

先来证明，当 $A_0, A_1, \cdots, A_k$ 满足条件： A_i 为 A_{i-1} 的真面时 $(i = 1, \cdots, k)$, $\overset{*}{A}_0$, $\overset{*}{A}_1, \cdots, \overset{*}{A}_k$ 为仿射无关点组.

为此，只要就 k 是 A_0 的维数证明即可. 也就是说，只要考虑 A_i 的维数比 A_{i-1} 的小 1 即可， $i = 1, \cdots, k$.

设 $A_0 = (a_0 a_1 \cdots a_k)$. 适当改变 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ 的次序，可设 $A_i = (a_i \cdots a_k)$. 于是

$$\overset{*}{A}_i = \frac{1}{k+1-i} a_i + \frac{1}{k+1-i} a_{i+1} + \cdots + \frac{1}{k+1-i} a_k. \quad (1)$$

设有 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 使 $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$ 及

$$\lambda_0 \overset{*}{A}_0 + \lambda_1 \overset{*}{A}_1 + \cdots + \lambda_k \overset{*}{A}_k = 0. \quad (2)$$

---

1) $\overset{*}{A}$ 为单形 A 的重心 (参见 (1.1)).

那么以 (1) 代入 (2), 得

$$\frac{\lambda_0}{k+1}a_0+\left(\frac{\lambda_0}{k+1}+\frac{\lambda_1}{k}\right)a_1$$
$$+\cdots+\left(\frac{\lambda_0}{k+1}+\frac{\lambda_1}{k}+\cdots+\frac{\lambda_k}{1}\right)a_k=0.$$

注意 $\frac{\lambda_0}{k+1}+\left(\frac{\lambda_0}{k+1}+\frac{\lambda_1}{k}\right)+\cdots+\left(\frac{\lambda_0}{k+1}+\frac{\lambda_1}{k}+\cdots+\frac{\lambda_k}{1}\right)=$ $\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_k=0$, 因此由 $a_0,a_1,\cdots,a_k$ 为无关点组, 知 $\frac{\lambda_0}{k+1}=\frac{\lambda_1}{k}=\cdots=\frac{\lambda_k}{1}=0$, 即, $0=\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0$. 这样 $\overset{*}{A}_0,\overset{*}{A}_1,\cdots,\overset{*}{A}_k$ 为无关点组. 故存在单形 $(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_k)$.

集合 $Sd\ K$ 构成复形. 可按 $\dim K$ 归纳地予以证明.

如果 $\dim K=0$. 那么 $Sd\ K=K$. 故为复形.

假设 $\dim K<k$ 时, $Sd\ K$ 为复形. 现在考虑 k 维复形 L.

显然 $Sd\ L$ 满足复形的条件 1). 下面证明, $Sd\ L$ 的任意两个开单形, 其交为空. 于是由 (1.14), 知 $Sd\ L$ 为复形.

假定 $(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_s)^\circ$ 和 $(\overset{*}{B}_0\overset{*}{B}_1\cdots\overset{*}{B}_t)^\circ$ 有公共点 x. 那么由 x 在 $(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_s)$ 中的重心坐标的各分量均为正, 知 x 在 A_0 中的重心坐标的各分量也为正. 于是 A_0 为 x(在 L 中) 的承载单形. 同样理由, 知 B_0 也为 x 的承载单形. 这样 $A_0=B_0$.

既然 $A_0=B_0$, 那么当 $\dim A_0<k$ 时, $(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_s)$ 和 $(\overset{*}{B}_0\overset{*}{B}_1\cdots\overset{*}{B}_t)$ 均为 $Sd\ L^{k-1}$ 中的元, 故按归纳假设, 它们相等.

若 $\dim A_0=k$. 设 $A_0=(a_0a_1\cdots a_k)$, $A_i=(a_0^{(i)}a_1^{(i)}\cdots a_{l_i}^{(i)})$, $i=1,\cdots,s$. 由假定, A_i 为 A_{i-1} 的面, $i=1,\cdots,s$.

设 x 在 $(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_s)$ 中的重心坐标为 $(\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_s)$, 即

$$\begin{aligned}x&=\sum_{i=0}^{s}\mu_i\overset{*}{A}_i\\&=\mu_0\left(\frac{1}{k+1}a_0+\cdots+\frac{1}{k+1}a_k\right)\\&\quad+\sum_{i=1}^{s}\mu_i\left(\frac{1}{l_i+1}a_0^{(i)}+\cdots+\frac{1}{l_i+1}a_{l_i}^{(i)}\right)\end{aligned}$$

按顶点 a_i 并项以后，立知

$$\frac{\mu_0}{k+1} = \min_i \left\{\lambda_i \Big| x = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i, \sum \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, 1 \le i \le k\right\}$$

即 $\frac{\mu_0}{k+1}$ 是 x 在它的承载单形 A_0 中的重心坐标 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ 诸分量中最小者.

同理，x 在 $(\overset{*}{B}_0\overset{*}{B}_1\cdots\overset{*}{B}_t)$ 中的重心坐标 $(\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_t)$ 也具有同样性质：$\frac{\nu_0}{k+1}$ 是 x 在 $B_0(=A_0)$ 中的重心坐标 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ 诸分量中最小者. 因此，$\mu_0 = \nu_0$.

考虑

$$y = \frac{1}{1-\mu_0}(x - \mu_0 \overset{*}{A}_0) = \frac{1}{1-\nu_0}(x - \nu_0 \overset{*}{B}_0).$$

由于 $(\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_s)$ 为 x 在 $(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_s)$ 中的重心坐标，故

$$y = \frac{1}{1-\mu_0}(\mu_1 \overset{*}{A}_1 + \cdots + \mu_s \overset{*}{A}_s) \in (\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_s).$$

注意 $x \in (\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_s)^\circ$，故 $1 > \mu_i > 0, i = 1, \cdots, s$. 于是 $y \in (\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_s)^\circ$.

同样理由，$y \in (\overset{*}{B}_1\cdots\overset{*}{B}_t)^\circ$. 于是 $y \in (\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_s)^\circ \cap (\overset{*}{B}_1\cdots\overset{*}{B}_t)^\circ$. 注意，这时 $\dim A_1 < k, \dim B_1 < k$. 因此 $(\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_s)$ 和 $(\overset{*}{B}_1\cdots\overset{*}{B}_t)$ 均为 $Sd\ L^{k-1}$ 中的元. 故按归纳假设，它们相等. 于是 $(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_s)$ 和 $(\overset{*}{B}_0\overset{*}{B}_1\cdots\overset{*}{B}_t)$ 相等.

这样，$Sd\ K$ 为复形. ◁

6.9 定理 复形 K 的重心重分 $Sd\ K$ 具有以下的性质：

1) $|Sd\ K| = |K|$.

2) 若 L 为 K 的子复形，则 $Sd\ L$ 为 $Sd\ K$ 的子复形.

证明 显然有 $|Sd\ K| \subset |K|$. 下面证明反方向的包含关系.

任给 $x \in |K|$, 不妨设 $A_0 = (a_0 a_1 \cdots a_k)$ 为其承载单形. 这样, 若 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ 为其重心坐标, 则

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1,$$

又 $\lambda_i > 0, i = 0, 1, \cdots, k$. 适当改变指标号码, 不妨设 $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k$.

考虑方程组

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_0'}{k+1} = \lambda_0, \\
&\frac{\lambda_0'}{k+1} + \frac{\lambda_1'}{k} = \lambda_1, \\
&\cdots\cdots \\
&\frac{\lambda_0'}{k+1} + \frac{\lambda_1'}{k} + \cdots + \frac{\lambda_k'}{1} = \lambda_k.
\end{aligned}$$

显然它有非负解 $(\lambda_0', \lambda_1', \cdots, \lambda_k')$. 而且 $\sum \lambda_i' = \sum \lambda_i = 1$, 又

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\lambda_0'}{k+1} + \cdots + \frac{\lambda_i'}{k+1-i} \right) a_i = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i' \overset{*}{A}_i,$$

这里 $A_i = (a_i a_{i+1} \cdots a_k)$, 于是 $x \in (\overset{*}{A}_0 \overset{*}{A}_1 \cdots \overset{*}{A}_k) \subset |Sd\ K|$, 这样 1) 得证.

至于 2), 那是显然的. ◁

¡ 由性质 1), 我们知道当 $\dim K > 1$ 时, 复形 $Sd\ K$ 实际上只是多面体 $|K|$ 的一个异于 K 的单纯剖分. 而且 $Sd\ K$ 是将 K 中的每个单形 A^k 切割得"更小"而已. 它的确切意义如下.

6.10 命题 单形 $A^k (k \geq 1)$ 的直径 1) 等于它的 1 维面的长度的最大值.

---

1) 按定义, E^n 中的点集 C, 其直径为 $\sup_{x,y \in C} \{\rho(x,y)\}$.

证明 已知单形的顶点，其特征为它不是单形中另外两点的中点 (1.2). 又三角形两边长的和大于相应中线长的两倍. 因此 A^k 中任意两点 x 和 y 的距离，当其中之一不是顶点时，其距离不可能达到最大值. 所以 A^k 的 1 维面的长度的最大值就是 A^k 的直径. ◁

6.11 定理 设 K 为 n 维复形，它的单形的直径都 $\leq \eta$, 那么 $Sd\ K$ 的单形的直径都 $\leq \left(\frac{n}{n+1}\right)\eta$.

证明 由 (6.10), 只要对 $Sd\ K$ 的 1 维单形验证上式就可以了.

任取 $Sd\ K$ 的一个 1 维单形 $(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1)$, 其中 A_1 为 A_0 的真面. 设 $A_0 = (a_0a_1\cdots a_k)$, $\overset{*}{A}_1 = \sum_{i=0}^{k}\lambda_i a_i \left(\sum_{i=0}^{k}\lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\right)$. 于是 $\rho(\overset{*}{A}_0, \overset{*}{A}_1) = \rho\left(\overset{*}{A}_0, \sum_i \lambda_i a_i\right) \leq \sum_i \lambda_i \rho(\overset{*}{A}_0, a_i) = \sum_i \lambda_i \cdot\rho\left(\frac{1}{k+1}\sum_j a_j, a_i\right) \leq \sum_{i,j}\lambda_i \frac{1}{k+1}\rho(a_j, a_i) = \frac{1}{k+1}\sum_{i,j}\lambda_i\rho(a_j, a_i) \leq \frac{1}{k+1}\sum_i \lambda_i k\eta = \frac{k}{k+1}\eta\sum_i\lambda_i = \frac{k}{k+1}\eta \leq \frac{n}{n+1}\eta$. ◁

下图表示的是 1 维复形 A^1 和 2 维复形 A^2 的重心重分. 显然，这时有 $Sd\ A^1 = \overset{*}{A}{}^1\ Sd\ \dot{A}^1$ 和 $Sd\ A^2 = \overset{*}{A}{}^2 Sd\ \dot{A}^2$ 成立. 一般，我们有

$$SdA^k = \overset{*}{A}{}^k Sd\ \dot{A}^k. \qquad (*)$$

上面已经介绍了三种获得新复形的运算. 它们的几何意义也是很明确的. 即一种是对锥形进行单纯剖分 (在底已有单纯剖分的前提下), 第二种是柱形，第三种是将原来的单纯剖分弄得更细. 下面介绍的运算，是从两个复形得到一个新复形.

6.12 定义 单形 $A^k = (a_0a_1\cdots a_k)$ 和 $B^l = (b_0b_1\cdots b_l)$ 的单纯积 $A^k \triangle B^l$ 是这样一个 $(k+1)(l+1)-1$ 维单形：它的顶点是 $(a_ib_j), 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq l$.

给定复形 K 和 L, 不妨设 K 为 A^k 的子复形, L 为 B^l 的子复形 (参见 (6.3)). 于是复形 K 和 L 的 **单纯积**$K\triangle L$ 是 $A^k\triangle B^l$ 的一个子复形, 它由所有的单纯积 $U^r\triangle V^s$ 及它们的面构成, 这里 U^r, V^s 分别为 K, L 的单形.

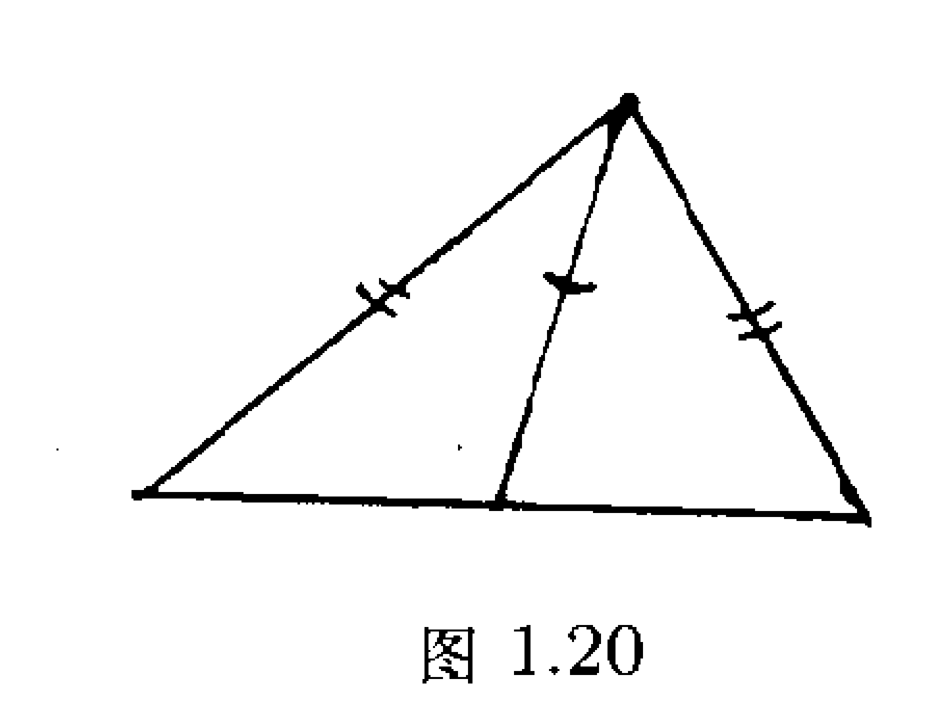


图 1.20

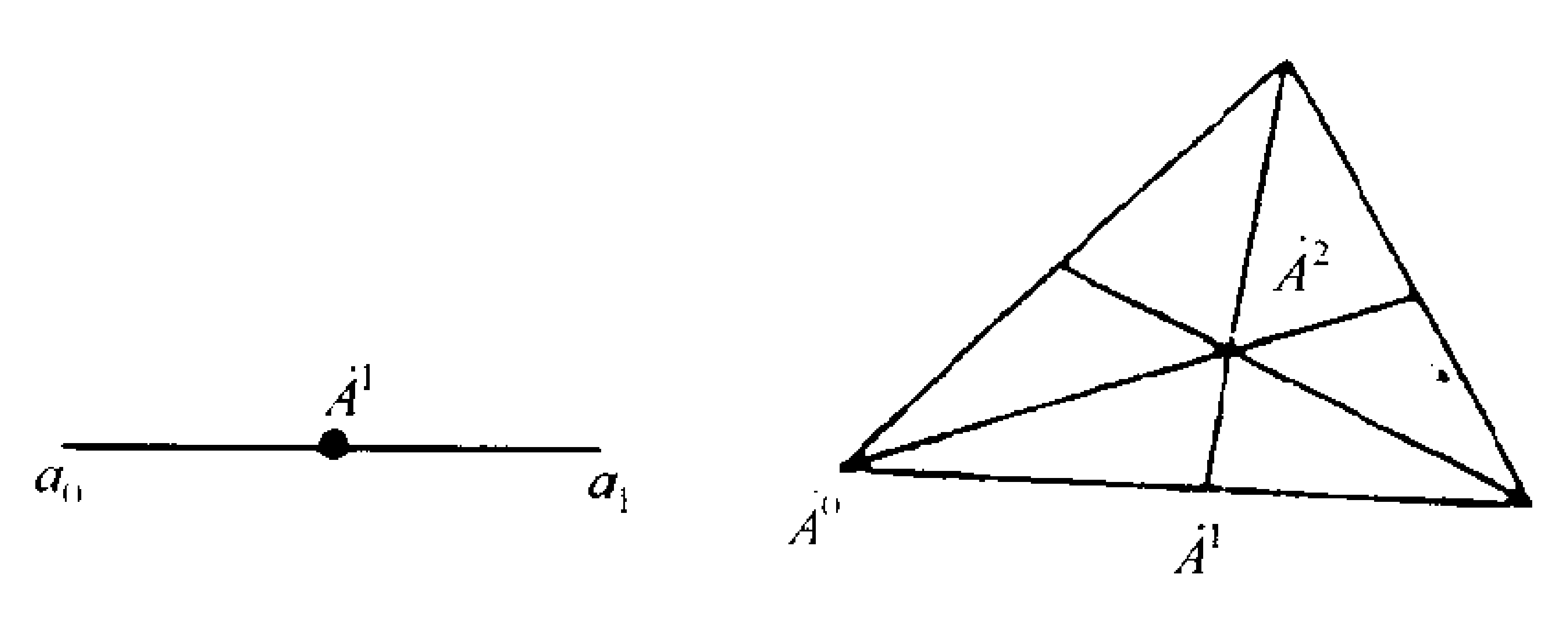


图 1.21

两个单纯复形的卡氏积, 一般而言不再是复形. 例如 $A^1\times A^1$. 因此在研究两个可剖分空间的卡氏积时, 会遇到困难. 单纯积的引入, 就是为了克服这个困难.

至此, 我们介绍了四种获得新复形的运算: 锥形, 柱形, 重心重分和单纯积. 关于这些新复形的同调群如何计算, 由于前三者相对来讲比较容易, 我们就先来解决.

下面考虑锥形的同调群. 为此先考虑锥形的代数性质.

在以 a 为顶、K 为底的锥形 aK 的链群 $C_k(aK)$ 中, 有一部分基本组的元为 $(aa_{i_1}\cdots a_{i_k})$, 这里 $(a_{i_1}\cdots a_{i_k})$ 为 $C_{k-1}(K)$ 的基本组的元. 以后将 $(a_{i_1}\cdots a_{i_k})$ 记为 σ 时, 那么就将 $(aa_{i_1}\cdots a_{i_k})$ 记为 $a\sigma$. 一般, 对 $c=\sum\limits_i\alpha_i\sigma_i\in C_{k-1}(K)$, 以 ac 表示 $C_k(aK)$ 中的元 $\sum\alpha_i a\sigma_i$.

不难验证

$$\partial(ac) = \begin{cases} c - a(\partial c), & \dim c > 0, \\ c - \varepsilon(c)a, & \dim c = 0. \end{cases} \tag{3}$$

它的几何意义可参见图 1.22.

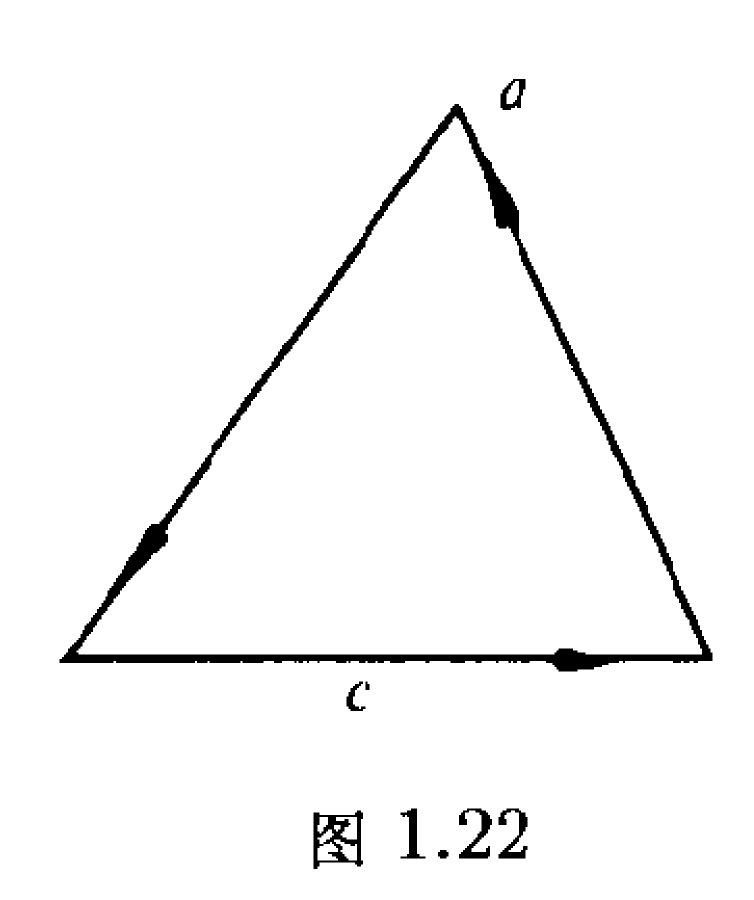


图 1.22

实际上，可以定义

$$a : C_{k-1}(aK) \to C_k(aK),$$

$$(a_{i_1} \cdots a_{i_k}) \mapsto (aa_{i_1} \cdots a_{i_k}).$$

这时当 $a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}$ 中出现 a 时，规定 $(aa_{i_1} \cdots a_{i_k})$ 为零. 不难验证 (3) 仍成立.

有了以上准备，我们可以进而证明

6.13 定理 对于以 a 为顶、K 为底的锥形 aK 来说，

$$H_k(aK) = \begin{cases} 0, & k \neq 0, \\ \mathbb{Z}, & k = 0. \end{cases}$$

证明 显然 aK 是连通的，因此 $H_0(aK) = \mathbb{Z}$.

再来考虑 $k > 0$ 时的 $H_k(aK)$.

任取 $[z^k] \in H_k(aK)$, 那么由 (3), 有

$$\partial(az^k) = z^k - a(\partial z^k), \quad k \geq 1.$$

于是由 $\partial z^k = 0 (k \geq 1)$ 知 $z^k \sim 0$. 故 $[z^k] = 0$. ◁

¡ 由于锥形 aK 没有“洞”，因此每个闭链一定是它所“圈定”的区域的边界，所以上述定理的结论是可以预期的.

6.14 推论 锥形的上同调群

$$H^i(aK) = 0, \quad i \neq 0. \qquad \triangleleft$$

¡ 由上面的讨论可以知道，锥形和单点复形具有相同的同调群. 显然，有此性质的复形是一类特殊的复形.

6.15 定义 复形 K 称为点状的，如果它和单点复形 P 具有相同的同调群，即

$$H_i(K) = \begin{cases} 0, & i \neq 0, \\ \mathbb{Z}, & i = 0\,. \end{cases}$$

6.16 命题 对复形 K，当 $k \geq 1$ 时，$H_k(K) = 0$ 的充要条件是在序列

$$C_{k+1}(K) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(K) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(K)$$

中，$\operatorname{Im} \partial_{k+1} = \operatorname{Ker} \partial_k$.

证明 按定义即知. $\triangleleft$

上述关系经常使用，故有

6.17 定义 在群和同态的序列

$$G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \xrightarrow{\alpha_2} G_3$$

中，如果有 $\operatorname{Im} \alpha_1 = \operatorname{Ker} \alpha_2$，便称该序列在 G_2 处正合.

在群和同态的长序列

$$\cdots \to G_{k+1} \xrightarrow{\alpha_{k+1}} G_k \xrightarrow{\alpha_k} G_{k-1} \to \cdots$$

中，如果在每个 G_k 处它都正合，便称该长序列为正合序列.

正合序列

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \xrightarrow{\alpha_2} G_3 \longrightarrow 0$$

称为短正合序列. 这个短正合序列叫做分裂的, 如果存在 $\beta_1: G_2 \to G_1$ 使 $\beta_1\alpha_1 = 1$. 或者等价地, 有 $\beta_2: G_3 \to G_2$ 使 $\alpha_2\beta_2 = 1$(为什么?), 这时

$$G_2 = G_1 \oplus G_3,$$

参见 (10.7).

¡ 一般而言, 对 $g_k \in G_k$, $\alpha_k(g_k)$ 容易计算, 但要判断 g_k 是否属于 $\mathrm{Im}\alpha_{k+1}$ 就很困难, 可正合性将此判断转化为 $\alpha_k(g_k)$ 的计算.

6.18 定理 复形 K 为点状的, 当且仅当长序列

$$\begin{aligned}\cdots \to C_{k+1}(K) &\xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(K) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(K) \\ &\to \cdots \to C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0\end{aligned} \tag{4}$$

为正合序列.

证明 必要性. 这时由 $H_k(K) = 0, k > 0$ 及 (6.16), 知上述长序列在 $C_k(K)(k > 0)$ 处为正合. 下面证明, 它在 $C_0(K)$ 处也正合, 即证明 $\mathrm{Im}\ \partial_1 = \mathrm{Ker}\ \varepsilon$.

由定义, 知增广同态 $\varepsilon: C_0(K) \to \mathbb{Z}$ 为满. 于是由第一同构定理, 知

$$C_0(K)/\mathrm{Ker}\ \varepsilon = \mathbb{Z}.$$

于是

$$C_0(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Ker}\ \varepsilon,$$

这样

$$\mathrm{Ker}\ \varepsilon = C_0(K)/\mathbb{Z}. \tag{5}$$

另一方面, 由 K 为点状, 有

$$H_0(K) = C_0(K)/\mathrm{Im}\ \partial_1 = \mathbb{Z}.$$

于是
$$C_0(K)=\mathbb{Z}+\mathrm{Im}\ \partial_1,$$
这样
$$\mathrm{Im}\ \partial_1=C_0(K)/\mathbb{Z}. \tag{6}$$
结合 (5) 和 (6), 有
$$\mathrm{Ker}\ \varepsilon=\mathrm{Im}\ \partial_1.$$

充分性.

这时, 由 $C_k(K)$ 处的正合性 ($k\geq 1$), 即 $\mathrm{Im}\ \partial_{k+1}=\mathrm{Ker}\ \partial_k$ 知
$$H_k(K)=0,\quad k\geq 1.$$

至于 $H_0(K)=\mathbb{Z}$, 可证明如下:

首先由 $C_0(K)$ 处的正合性, 知 $\mathrm{Im}\ \partial_1=\mathrm{Ker}\ \varepsilon$. 又注意 ε 为满同态. 于是
$$H_0(K)=\frac{C_0(K)}{\mathrm{Im}\ \partial_1}=\frac{C_0(K)}{\mathrm{Ker}\ \varepsilon}=\mathrm{Im}\ \varepsilon=\mathbb{Z}\qquad\lhd$$

鉴于 (4) 在描述点状复形时的特殊作用, 我们给它取个名字. (注意, 在序列 (4) 中, $\mathrm{Im}\ \partial_1\subset\mathrm{Ker}\ \varepsilon$).

6.19 定义 序列 (4) 称为复形 K 的**增广链复形**, 记为 $\tilde{C}_*(K)$[1]. 由增广链复形 $\tilde{C}_*(K)$ 所决定的同调群
$$\tilde{H}_k(K)=\frac{\mathrm{Ker}\ \partial_k}{\mathrm{Im}\ \partial_{k+1}},\quad k\geq 1$$
$$\tilde{H}_0(K)=\frac{\mathrm{Ker}\ \varepsilon}{\mathrm{Im}\ \partial_1},$$
叫做复形 K 的**约化同调群**.

于是 (6.18) 可改写为

1) 为了方便, 有时也将 $\mathbb{Z}$ 记为 $C_{-1}(K)$.

6.20 定理 复形 K 为点状的，当且仅当 $\tilde{H}_k(K) = 0$, $k \geq 0$. ◁

在复形 K 的同调群和约化同调群之间，存在着如下的关系.

6.21 定理 对于复形 K,

$$H_k(K) = \tilde{H}_k(K), \quad k \geq 1,$$

$$H_0(K) = \tilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}.$$

证明 对于 $k \geq 1$ 部分，由定义即知.

$k = 0$ 的情形，只要注意 $C_0(K) = \mathrm{Ker}\,\varepsilon \oplus \mathbb{Z}$ 以及 $\mathrm{Im}\,\partial_1 \subset \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ 即可. 细节留给读者. ◁

接下来考虑柱形 $K \times I$.

由于以后我们将证明，同调群不仅是拓扑不变的，实际上，还是同伦不变的. 而柱形 $K \times I$ 和 K 同伦，因此它们的同调群一样. 这么一来，我们在此就不做具体的计算了. 而只介绍以下的事实.

当 $K = A^k = (a_0 \cdots a_k)$ 时，在 $C_{k+1}(A^k \times I)$ 中有以下的元：

$$\sum_{i=0}^{k}(a_0^{(0)} \cdots a_i^{(0)} a_i^{(1)} \cdots a_k^{(1)}).$$

将此元记为 $A \times I$. 那么很容易验证

$$\partial(A \times I) = A \times 1 - A \times 0 - (\partial A \times I), \tag{7}$$

这里 $A \times 1 = (a_0^{(1)} \cdots a_k^{(1)}), A \times 0 = (a_0^{(0)} \cdots a_k^{(0)})$, 而

$$\partial A = \sum_{a=0}^{k}(-1)^i(a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_k)$$

一如往常. 至于 $\partial A \times I$ 就是 $\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^i\ (a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_k) \times I$.

显然，(7) 的几何意义如图 1.23 所示.

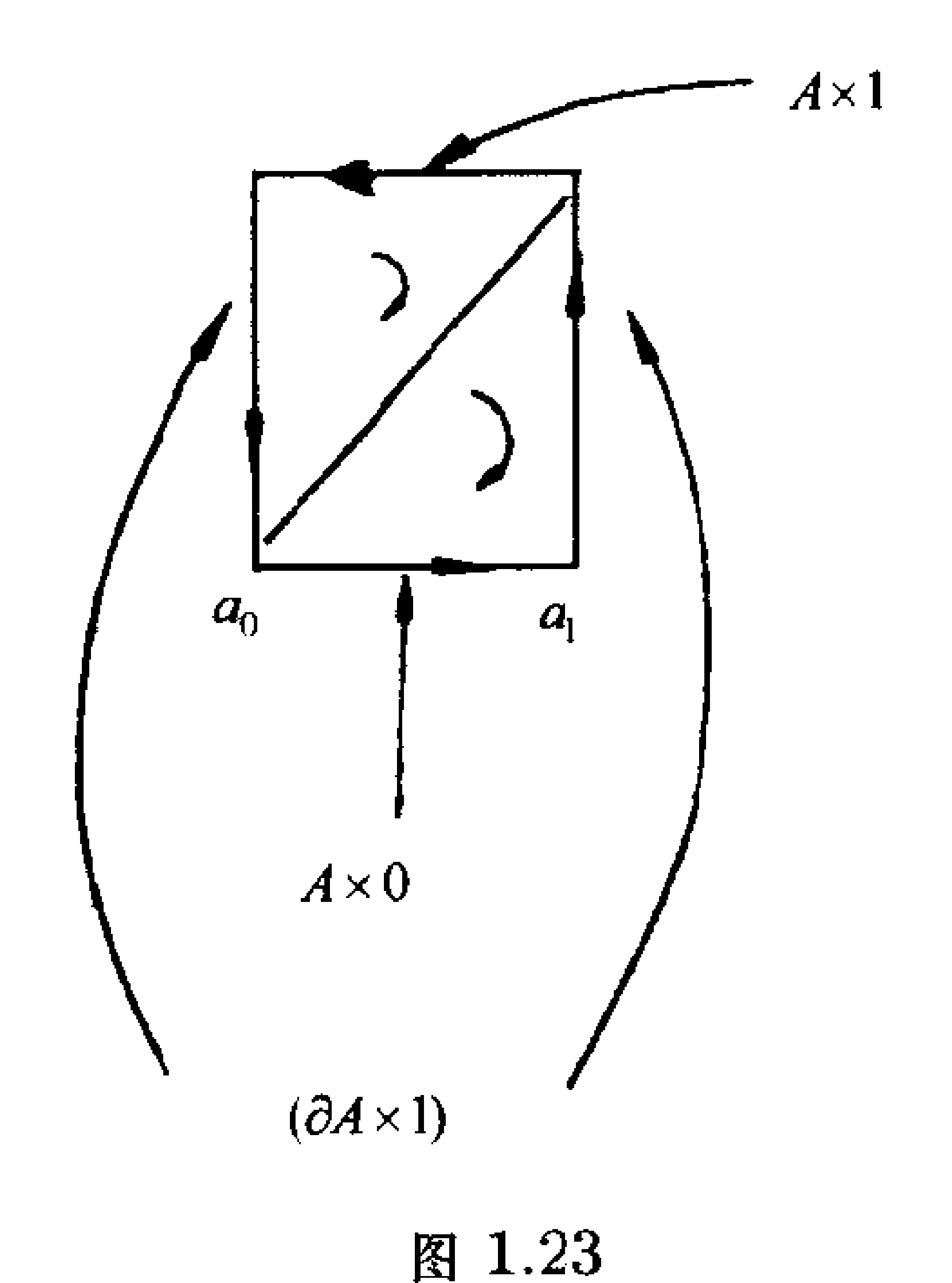


图 1.23

¡ 线性地扩充运算"$\times I$", 便可将 (7) 中的 A 改为任意的链 c, 即有

$$\partial(c \times I) = c \times 1 - c \times 0 - (\partial c) \times I, \tag{8}$$

关于重心重分复形 $Sd\,K$, 它的同调群的计算需要一些准备, 下面就从这些准备开始.

§7. 单纯映射、链映射、链同伦

由 (6.9), 知 $|K| = |Sd\ K|$, 因此从同调群的拓扑不变性, $H_k(Sd\ K)$ 应与 $H_k(K)$ 同构. 但在同调群的拓扑不变性证明以前, 能否证明它呢? 为了证明, 首先要在 $H_k(Sd\ K)$ 和 $H_k(K)$ 间建立联系.

一般讲, 要在同调群 $H_k(K)$ 和 $H_k(L)$ 间建立联系 (同态), 由于 $H_k(K) = Z_k(K)/\ B_k(K), H_k(L) = Z_k(L)/B_k(L)$, 所以只要在闭链群 $Z_k = \text{Ker}\ \partial_k$ 间建立一个将 $B_k(K) = \text{Im}\ \partial_{k+1}^K$ 映入 $B_k(L) = \text{Im}\ \partial_{k+1}^L$ 的同态就可以了. 可是给了复形 K, 计算 $\text{Ker}\ \partial_k$ 并不是一件轻松的事情. 实际上, 对于一般的复形 K, 我们无法描述它, 相比之下, 链群 $C_k(K)$ 由于有基本组存在, 它的

元容易描述. 实际上, 它的元就是基本组的元的线性组合. 因此, 在 $C_k(K)$ 上定义同态比较容易. 但为了能将 $Z_k(K)$ 映入 $Z_k(L)$, 将 $B_k(K)$ 映入 $B_k(L)$. 我们需要对这些定义在 $C_k(K)$ 上的同态加些限制. 显然, 这个限制就是它要保持边界关系, 因此有

7.1 定义 将 K 的链群 $C_k(K)$ 映入复形 L 的链群 $C_k(L)$ 的一串同态

$$f_k : C_k(K) \to C_k(L), \quad k \geq 0,$$

叫做是 **链映射**, 如果

$$\partial_k^L f_k = f_{k-1}\partial_k^K, \quad k \geq 1, \tag{1}$$

即图

$$\begin{array}{ccc} C_k(K) & \xrightarrow{f_k} & C_k(L) \\ \downarrow \partial_k^K & & \downarrow \partial_k^L \\ C_{k-1}(K) & \xrightarrow{f_{k-1}} & C_{k-1}(L) \end{array}$$

可换, 其中 $\partial_k^L, \partial_k^K$ 分别表示 L, K 中的边缘同态, 如果还有

$$\varepsilon^K = \varepsilon^L f_0,$$

则称链映射 $f = \{f_k\}$ 为 **保持增广的**.

7.2 例 $A^1 = (a_0a_1)$ 和 $B^1 = (b_0b_1)$ 均为 1 维单形, 命 $K = Sd\ A^1, L = B^1$. 定义

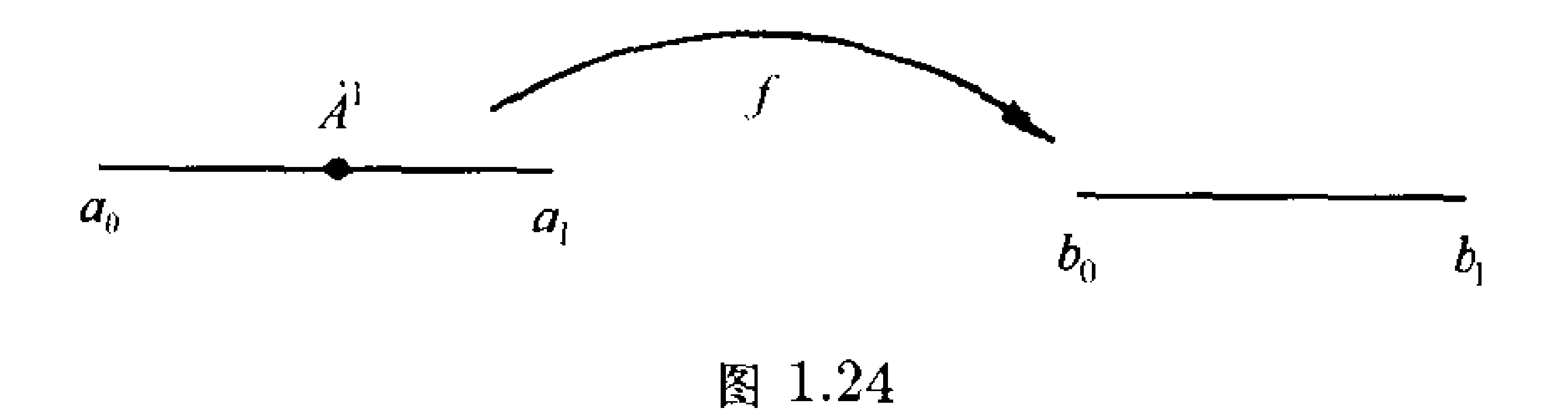


图 1.24

$$f_0 : C_0(K) \to C_0(L)$$

为 $f_0(a_0) = 0, f_0(a_1) = 0, f_0(\overset{*}{A}{}^1) = b_0 - b_1$(参见图 1.24). 又

$$f_1 : C_1(K) \to C_1(L)$$

为 $f_1(+(a_0 \overset{*}{A}{}^1)) = +(b_1b_0), f_1(+(\overset{*}{A}{}^1a_1)) = +(b_0b_1)$. 那么由直接验算，可知 $\{f_i\}$ 为链映射. 不过它不是保持增广的.

7.3　命题　设 $\{f_k : C_k(K) \to C_k(L)\}$ 和 $\{g_k : C_k(L) \to C_k(M)\}$ 为 (保持增广的) 链映射，那么

$$\{g_k \circ f_k : C_k(K) \to C_k(M)\}$$

也是 (保持增广的) 链映射.

证明　因为 $\{f_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 都是链映射，故

$$\partial_k^M(g_k \circ f_k) = g_{k-1}\partial_k^L f_k = (g_{k-1} \circ f_{k-1})\partial_k^K.$$

所以 $\{g_k \circ f_k\}$ 为链映射.

保持增广部分可类似证明.　◁

7.4　命题　设 $\{f_k : C_k(K) \to C_k(L)\}$ 为 (保持增广的) 链映射，那么它们导出 (约化) 同调群间的同态

$$f_{k_*} : H_k(K) \to H_k(L).$$

$$(f_{k_*} : \tilde{H}_k(K) \to \tilde{H}_k(L))$$

特别，由恒同映射组成的链映射 $\{1_k : C_k(K) \to C_k(K)\}$ 导出同调群间的恒同同态

$$1_{k_*} = 1_k : H_k(K) \to H_k(K).$$

证明　后一半是显然的. 所以只要证前一半. 这时只要证明以下的包含关系即可:

$$f_k(Z_k(K)) \subset Z_k(L),$$

$$f_k(B_k(K)) \subset B_k(L).$$

但这由 (1) 立刻可知. 故命题成立.　◁

根据上面的讨论，为了定义由 $H_k(K)$ 到 $H_k(Sd\ K)$ 的同态，只要能在 $C_k(K)$ 和 $C_k(Sd\ K)$ 间建立起链映射就可以了.

由于链群是由基本组生成，因此只要能对基本组的元规定好它的值就可以了.

先看 $k=0$ 情形. 这时顶点经重分后仍为自己，所以取恒同映射就可以了.

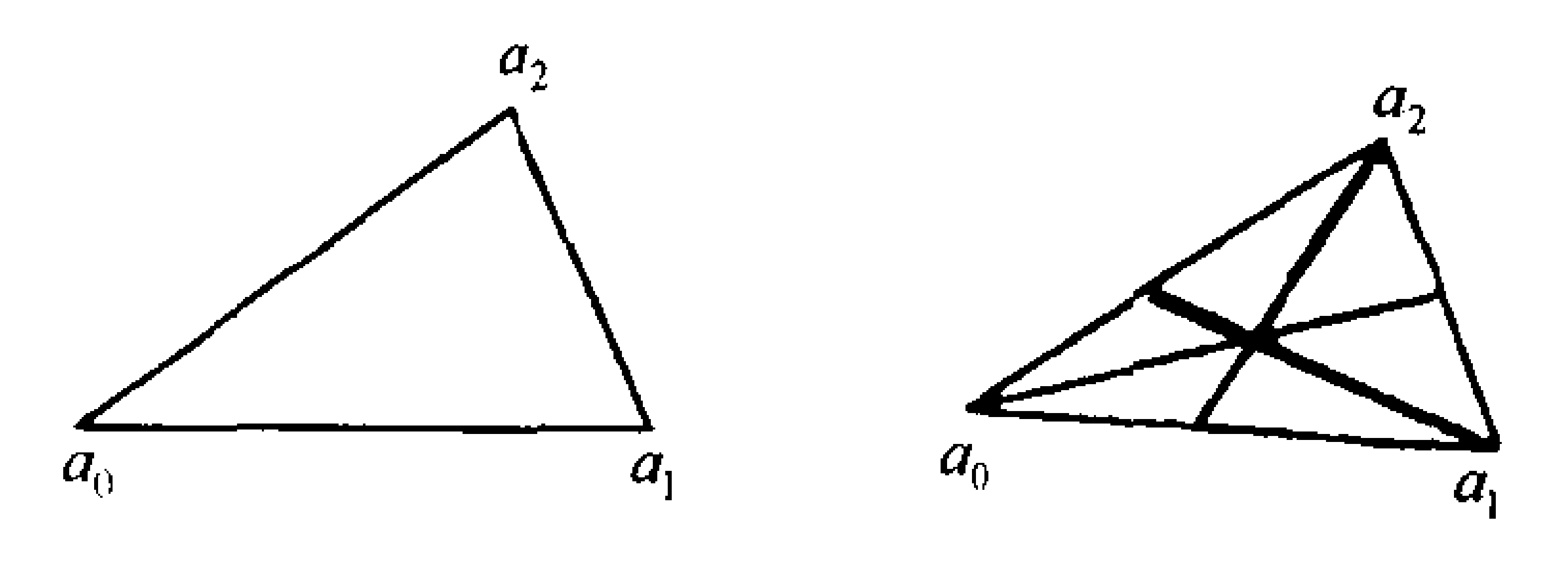


图 1.25

$k=1$. 这时，A^1 经重分后变为两个子线段. 所以它的值应为这两个子线段的和. 同样，A^2 经重分后，由一个三角形变为 6 个小三角形参见图 1.25. 所以这时它的值应为这 6 个小三角形的和. 只是，子线段或小三角形的指向该如何给？显然这些指向该"沿袭"A^1 或 A^2 的指向才对.

下面就是这种设想的代数化.

7.5　例　在复形 K 和它的重心重分复形 $Sd\ K$ 间，存在着如下的保持增广的链映射

$$Sd_k : C_k(K) \to C_k(Sd\ K).$$

实际上，对 $x^k \in C_k(K)$, 我们按 k 归纳地定义 $Sd_k x^k$ 如下. 当 $k=0$, 命

$$Sd_0 x^0 = x^0.$$

于是保持增广的条件 $\varepsilon Sd_0 = \varepsilon$ 满足. 现在假定 $Sd_{k-1}x^{k-1}$ 已定义好. 先考虑 $x^k = \sigma^k = +A^k$ 为基本组的元这个特殊情况. 由于 $\partial\sigma^k$ 的承载复形是 $\dot{A}^k$, 于是 $\partial\sigma^k \in C_{k-1}(\dot{A}^k)$ (参见 (1.24)).

因此按归纳假定，$Sd_{k-1}(\partial\sigma^k) \in C_{k-1}(Sd\dot{A}^k)$ 已有定义. 命

$$Sd_k\sigma^k = \overset{*}{A}{}^k Sd_{k-1}(\partial\sigma^k).$$

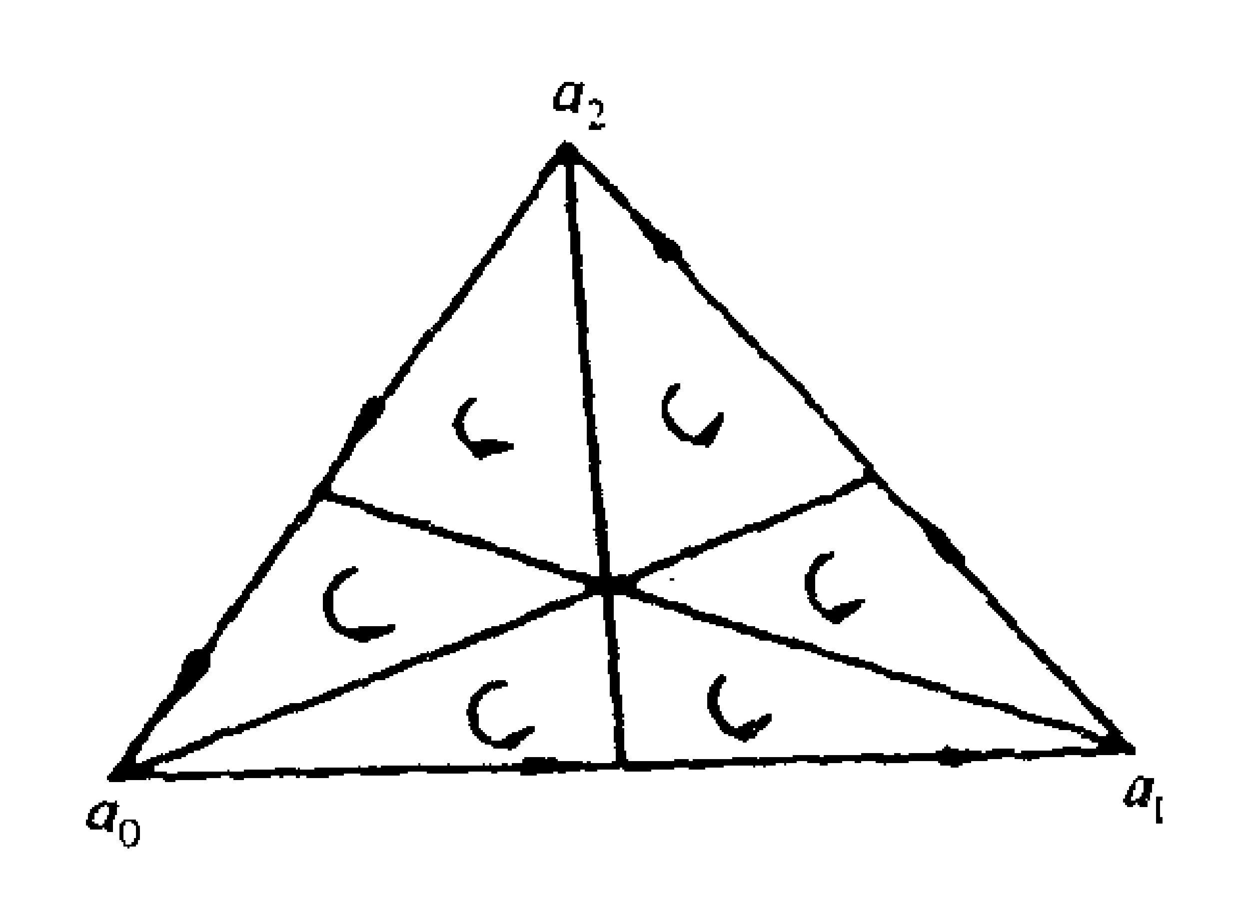


图 1.26

注意，上式右端是以 $\overset{*}{A}{}^k$ 为顶、$Sd\ \dot{A}^k$ 为底的锥复形上的一个链，但 $Sd\ A^k = \overset{*}{A}{}^k Sd\ \dot{A}^k$，(参见 (6.11) 后的式 (*))．所以上式实际上是 $Sd\ A^k$ 的一个链．当然也是 $Sd\ K$.

现在将 Sd_k 线性扩充到整个 $C_k(K)$ 上，就得到我们所要的同态.

余下是验证 $\{Sd_k\}$ 为链映射，即有

$$\partial Sd_k x^k = Sd_{k-1}\partial x^k. \tag{2}$$

由于 Sd_k 为同态，因此只要对 $x^k = \sigma^k = +A^k$ 为基本组的元来验证就够了.

当 $k=0$，(2) 显然成立．以下用归纳法.

$$\begin{aligned}
\partial Sd_k\sigma^k &= \partial(\overset{*}{A}{}^k Sd_{k-1}\partial\sigma^k)\\
&= \begin{cases} Sd_{k-1}\partial\sigma^k - \overset{*}{A}{}^k \partial Sd_{k-1}\partial\sigma^k & k>1,\\ Sd_0\partial\sigma^1 - \varepsilon(Sd_0\partial\sigma^1)\ \overset{*}{A}{}^1 & k=1.\end{cases}\\
&= \begin{cases} Sd_{k-1}\partial\sigma^k - \overset{*}{A}{}^k Sd_{k-2}\partial\partial\sigma^k & (\text{归纳假定})\\ Sd_0\partial\sigma^1 - \varepsilon(\partial\sigma^1)\ \overset{*}{A}{}^1 & (\text{保持增广条件})\end{cases}\\
&= Sd_{k-1}\partial\sigma^k.
\end{aligned}$$

这样 $\{Sd_k\}$ 为保持增广映射. 以后称它为 **重分链映射**. 它们在同调群间所导出的同态

$$Sd_{k_*}: H_k(K) \to H_k(Sd\ K)$$

叫做 **重分同态**.

有了 $Sd_*: H_k(K) \to H_k(Sd\ K)$. 我们还要定义一个反方向的同态. 按上面所说, 应先在链群 $C_k(Sd\ K)$ 上, 定义一个取值在 $C_k(K)$ 映射. 由简单的情形, 如 $K = A^2(k = 2)$, 就可以看出. 这时要为 6 个小三角形中的每一个, 规定哪些映为原来的大三角形, 哪些映为 0. 这不仅不胜其繁, 而且也不现实. 因此, 我们再来分析一下, 怎么才能得到链映射.

链映射, 实际上, 完全由其在基本组上的值决定, 也就是说, 只要知道它是单形间的怎样一个对应就行了. 而单形由顶点决定, 因此顶点间的一个对应, 如果能保持将单形变为单形, 便有望得到链映射. 于是有

7.6　定义　复形 K, L 间的 **单纯映射**

$$f: K \to L$$

是映 $|K|$ 入 $|L|$ 的映射, 它适合: (i) 把顶点映成顶点, (ii) 把单形映成单形, (iii) 限制在单形上, 对重心坐标是线性的.

¡　(1) 显然, 单纯映射完全由它在顶点上的值决定, 反之为了得到单纯映射, 只要在复形的顶点间, 建立一个适合 (ii) 的对应即可.

(2) 条件 (ii) 并没有说它把 K 的 k 维单形变为 L 的 k 维单形. 实际上它可以是 L 中维数 $< k$ 的单形.

7.7　命题　单纯映射的合成还是单纯映射.

证明　按定义即知. ◁

7.8　命题　如果 $f: K \to L$ 是单纯映射, 则 f 导出一个保持增广映射

$$f_k: C_k(K) \to C_k(L),$$

特别，恒同映射 $1: K \to K$ 导出的 1_k 也是恒同映射.

证明 由于 $C_k(K)$ 是由基本组 $\{\sigma_i^k | i = 1, \cdots, \varphi_k\}$ 自由生成，因此只要对 $\sigma_i^k = +(a_0 a_1 \cdots a_k)$ 定义 $f_k(\sigma_i^k)$. 然后再做线性扩充就可以了. 现在命

$$f_k(\sigma_i^k) = \begin{cases} +((fa_0)(fa_1)\cdots(fa_k)), & \text{无 } i \neq j \text{ 使 } fa_i = fa_j, \\ 0, & \text{有 } i \neq j \text{ 使 } fa_i = fa_j. \end{cases}$$

注意，按单纯映射的条件 (ii), $fa_0, fa_1, \cdots, fa_k$ 是 L 中某个单形的顶点. 因此 $f_k(\sigma_i^k)$ 的定义合理.

不难验证，如上定义的 $\{f_k\}$ 是一个保持增广映射. 实际上，在 $k \geq 1$ 时，如果

$$f_k(+(a_0 a_1 \cdots a_k)) = +((fa_0)(fa_1)\cdots(fa_k)),$$

那么

$$\begin{aligned} &\partial_k f_k(+(a_0 a_1 \cdots a_k)) \\ &= \partial_k(+((fa_0)(fa_1)\cdots(fa_k))) \\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i((fa_0)\cdots(\hat{fa_i})\cdots(fa_k)). \end{aligned}$$

另一方面.

$$\begin{aligned} &f_{k-1}\partial_k(+(a_0 a_1 \cdots a_k)) \\ &= f_{k-1}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(a_0\cdots\hat{a}_i\cdots a_k)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^k((fa_0)\cdots(\hat{fa_i})\cdots(fa_k)). \end{aligned}$$

因此， $\partial_k f_k = f_{k-1}\partial_k$.

再考虑有 $i \neq j$ 使 $fa_i = fa_j$ 的情形. 这时

$$f_k(+(a_0 a_1 \cdots a_k)) = 0,$$

于是 $\partial_k f_k = 0$. 另一方面, 当 $i \neq l \neq j$ 时, $fa_0, \cdots, \widehat{fa_l}, \cdots, fa_k$ 中仍有 $fa_i = fa_j$ 成立, 因此

$$f_{k-1}(+(a_0 \cdots \hat{a}_l \cdots a_k)) = 0.$$

又 $f_{k-1}((-1)^i(a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_k))$ 和 $f_{k-1}((-1)^j(a_0 \cdots \hat{a}_j \cdots a_k))$ 或同时为 0, 或相差一个符号 (为什么？), 因此 $f_{k-1}\partial_k(+(a_0 \cdots a_k)) = 0$. 这样也有 $f_{k-1}\partial_k = \partial_k f_k$.

最后验证保持增广的条件: $\varepsilon = \varepsilon f_0$.

这时只要对 $\sigma_i^0 = +(a)$ 验证即可. 但这显然. ◁

7.9 命题 单纯映射 $f: K \to L$ 导出同调群间的同态

$$f_{k_*}: H_k(K) \to H_k(L).$$

特别, $1: K \to K$ 导出同调群间的恒同同构.

证明 由 (7.8), f 导出保持增广映射 $\{f_k: C_k(K) \to C_k(L)\}$. 再由 (7.4), 我们就得到同调群间的同态.

最后一个断言是显然的. ◁

7.10 命题 设 $f: K \to L, g: L \to M$ 均为单纯映射, 那么

$$(g \circ f)_k = g_k \circ f_k.$$

证明 由定义立刻可以得到. ◁

7.11 推论 设 $f: K \to L, g: L \to M$ 均为单纯映射, 那么

$$(g \circ f)_{k_*} = g_{k_*} \circ f_{k_*}.$$

证明 这由 (7.9) 和 (7.10) 即知. ◁

至此, 我们知道, 链群间映射可以导出同调群间的同态, 而复形间的单纯映射可以导出链群间映射, 最终导出同调群间的同态. 因此为了定义 Sd_* 的逆, 我们从定义 $Sd\ K$ 到 K 的单纯映射 π_0 开始.

由于单纯映射，第一步是顶点到顶点的对应，所以要得到 π_0，就得为 $Sd\ K$ 的顶点 $\overset{*}{A}$，决定它在 K 中的对应点. 也就是说，要将 $Sd\ K$ 的顶点 $\overset{*}{A}$ 改造为 K 的顶点.

根据 **尽可能简单，能在低维解决，就不把它放到高维去** 的指导思想. 将 $Sd\ K$ 的顶点 $\overset{*}{A}$ 改造为它在 K 中的承载单形 A 的一个顶点就很自然. 问题是它真的是一个单纯映射吗？即它能将单形映为单形吗？对此我们有

7.12 命题 对 $Sd\ K$ 的顶点 $\overset{*}{A}$，用 $\pi_0(\overset{*}{A})$ 表示单形 A 的一个顶点，那么对应

$$\pi_0 : Sd\ K \to K$$

决定一个单纯映射.

证明 由 (7.6) 后的 "¡"，我们只要证明，对应 π_0 将 $Sd\ K$ 的单形变为 K 的单形即可.

若 $\overset{*}{A}_0, \overset{*}{A}_1, \cdots, \overset{*}{A}_k$ 决定 $Sd\ K$ 的一个单形，那么 (经适当排列后) K 的单形 $A_0, A_1, \cdots, A_k$ 适合条件： A_i 为 A_{i-1} 的面 [1]. 因此 $\pi_0(\overset{*}{A}_0), \pi_0(\overset{*}{A}_1), \cdots, \pi_0(\overset{*}{A}_k)$ 都是 A_0 的顶点，所以它们决定 A_0 的一个面，从而为 K 的一个单形. ◁

¡ π_0 并不唯一. 由 π_0 所决定的单纯映射我们仍用 π_0 表示.

7.13 定义 由单纯映射

$$\pi_0 : Sd\ K \to K$$

所导出映射

$$\pi = \{\pi_k : C_k(Sd\ K) \to C_k(K)\}$$

1) 以后 $Sd\ K$ 的单形，其顶点的次序都这样取.

叫做 **标准链映射**.

上面已经指出, π_0 并不唯一, 因此标准链映射 π 也不唯一. 可是它们在同调群上却导出同一同态 ((7.24) 将证明, 它们都是 Sd_* 的逆). 即有

$$\pi_{k_*} = \pi'_{k_*} : H_k(SdK) \to H_k(K),$$

这里 π_k 由 π_0 导出, 而 π'_k 由 π'_0 导出.

为了证明这一点. 我们需要对 $Sd\,K$ 的 k 维闭链 $z^k = \sum_i \alpha_i \sigma_i^k$[1] 证明 $\pi_k(z^k)$ 和 $\pi'_k(z^k)$ 同调. 即有 K 的一个 $(k+1)$ 维链 c^{k+1}, 使

$$\partial c^{k+1} = \pi_k(z^k) - \pi'_k(z^k).$$

由于 c^{k+1} 依赖于 z^k, 故将其记为 $D_k(z^k)$. 于是为了保证 π_k 和 π'_k 在同调群上导出同一同态, 只要证明存在一个同态 D_k : $Z_k(Sd\ K) \to C_{k+1}(K)$, 使

$$\partial D_k(z^k) = \pi_k(z^k) - \pi'_k(z^k). \tag{3}$$

显然, $D_k(z^k)(\in C_{k+1}(K))$ 的选取, 与 K 的整体结构有关. 这也体现了同调性质是整体性质这一特点.

和以前说过的理由一样, 在闭链群 $Z_k(Sd\ K)$ 上定义同态 D_k 比较难. 对比之下, 在链群 $C_k(Sd\ K)$ 上定义 D_k 反而会好操作一些. 原因就是 $Z_k(Sd\ K)$ 虽然自由, 可它的基不清楚, 而 $C_k(Sd\ K)$ 由基本组生成. 所以在 $C_k(Sd\ K)$ 上定义同态 D_k 比较容易, 即只要将它在基本组的元 σ^k 上的值 $D_k(\sigma^k)$ 规定好, 然后再线性扩充就可以了. 当然不要忘了证明, 这样定义的 D_k, 限制在 $Z_k(Sd\ K)$ 上, 使 (3) 成立.

---

1) 若 $\sigma_i^k = \pm(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_k)$, 则按约定, 应有 A_i 为 A_{i-1} 的面, $i = 1, \cdots, k$.

由于只要求 (3) 在 $Z_k(Sd\ K)$ 上成立，因此对于 $C_k(Sd\ K)$ 的元， (3) 可以不成立. 也就是说，对于 $C_k(Sd\ K)$ 的元，可以把对 D_k 的要求放松一些.

先来回忆一些例子. 在锥形里面，我们有 (§6, 式 (3)),

$$\partial(ac) = c - a(\partial c).$$

如果将 ac 记为 $D(c)$, 那么上式变成

$$\partial(D(c)) = c - D(\partial c). \tag{4}$$

此式限制在 c 为闭时，就得到 $c \sim 0$.

又如在柱形里，我们有 (§6, 式 (7))

$$\partial(c \times I) = c \times 1 - c \times 0 - (\partial c) \times I.$$

将 $c \times I$ 记为 $D(c)$, 那么上式变成

$$\partial(D(c)) = c \times 1 - c \times 0 - D(\partial c).$$

限制在 c 为闭时，就有 $c \times 1 \sim c \times 0$.

所以为使 (3) 在 $Z_k(Sd\ K)$ 上成立. 对于定义在 $C_k(Sd\ K)$ 上的同态 D_k, 可将要求放松为，对 $c^k \in C_k(SdK)$, 有

$$\partial D(c^k) = \pi_k(c^k) - \pi'_k(c^k) - D(\partial c^k)$$

就可以了，特别，是上式对基本组的元 σ^k 成立就可以了.

把它一般化就有

7.14　定义　设 $f = \{f_k\}$ 和 $g = \{g_k\}$ 是两个由复形 K 到复形 L 映射. 如果存在一串同态

$$D = \{D_k : C_k(K) \to C_{k+1}(K)\}$$

使

$$\partial_{k+1} D_k + D_{k-1} \partial_k = f_k - g_k \tag{5}$$

成立，则称 f 和 g 为 **链同伦** 的. 记为 $f \simeq g$. 同时称 D 为连接 f 和 g 的一个 **链伦移**，记为 $D : f \simeq g$.

¡ 链映射间同伦关系是一个等价关系.

7.15 命题 设链映射 $f = \{f_k\}$ 和 $g = \{g_k\}$ 为链同伦的，即有 D 使

$$D : f \simeq g,$$

那么

$$f_{k_*} = g_{k_*} : H_k(K) \to H_k(L), \quad k \geq 0.$$

证明 设 $[z^k] \in H_k(K)$，而 z^k 为 $[z^k]$ 的一个代表. 我们只要能证明

$$f_k(z^k) \sim g_k(z^k)$$

就可以了. 但按假定 $D : f \simeq g$，我们由 (5) 有

$$\partial_{k+1} D_k z^k + D_{k-1} \partial_k z^k = f_k z^k - g_k z^k.$$

注意 $z^k \in Z_k(K)$. 于是 $\partial_k z^k = 0$. 这样

$$\partial_{k+1} D_k z^k = f_k z^k - g_k z^k.$$

所以有 $f_k(z^k) \sim g_k(z^k)$. ◁

根据上述命题，为了证明 π_0 和 π_0' 在同调群上导出同一个同态，只要证明 π 和 π' 是链同伦的就可以了.

如果 K 是锥形，那么根据锥形里面有 (4) 成立. 不难证明存在着连接 π 和 π' 伦移 D. 但是一般而言， K 不是锥形. 于是如能设法将 π 和 π' 的像"纳入"某个锥形之中，问题也可解决. 下述命题便是按此想法建立的.

7.16 命题 链映射 $\pi = \{\pi_k : C_k(SdK) \to C_k(K)\}$ 和 π' 是链同伦的.

证明 首先留意，单纯映射 π_0 将 $Sd\ K$ 的单形 $(\overset{*}{A}_0 \overset{*}{A}_1 \cdots \overset{*}{A}_k)$ 映为 A_0 的一个面 (参见 (7.12) 的证明). 同样 π_0' 也将这

个单形映为 A_0 的一个面. 因此, $Sd\ K$ 的基本组中的元 $\sigma^k = \pm(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_k)$, 在 π_k 和 π'_k 下的像 $\pi_k(\sigma^k)$ 和 $\pi'_k(\sigma^k)$ 都是 K 的子复形 A_0, 而 A_0 为锥形.

现在我们归纳地来构作链伦移 $D = \{D_k\}$.

先定义 $D_0 : C_0(Sd\ K) \to C_1(K)$.

任取 $C_0(SdK)$ 的一个基元 $\sigma^0 = \pm\overset{*}{A}$ 来. 显然 π_0,π'_0 都保持增广, 即 $\varepsilon\pi_0 = \varepsilon = \varepsilon\pi'_0$. 因此 $\varepsilon(\pi_0(\sigma^0) - \pi'_0(\sigma^0)) = 0$. 即 $\pi_0(\sigma^0) - \pi'_0(\sigma^0) \in \mathrm{Ker}(\varepsilon : C_0(A) \to \mathbb{Z})$.

因为 A 是锥形, 所以它是点状的. 於是由 (6.18) 知

$$\mathrm{Ker}\ \varepsilon = \mathrm{Im}\ \partial_1.$$

这样就有 $c_1 \in C_1(A)$ 使

$$\partial_1 c_1 = \pi_0(\sigma^0) - \pi'_0(\sigma^0).$$

将 c_1 视为 K 的 1 维链, 并记做 $D_0(\sigma^0)$, 那么我们就定义好

$$D_0 : C_0(Sd\ K) \to C_1(K)$$

使

$$\partial_1 D_0 = \pi_0 - \pi'_0 : C_0(Sd\ K) \to C_0(K)$$

成立, 而且 $D_0(\sigma^0)$ 是 K 的子复形 $A(\sigma^0 = \pm\overset{*}{A})$ 的 1 维链.

假定当 $n < k$ 时, 已有

$$D_n : C_n(Sd\ K) \to C_{n+1}(K)$$

使

$$\partial_{n+1} D_n = \pi_n - \pi'_n - D_{n-1}\partial_n$$

成立, 而且 $D_n(\sigma^n)$ 是 K 的子复形 A_0, 这里 $\sigma^n = \pm(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_n)$. 现在要定义 $D_k : C_k(Sd\ K) \to C_{k+1}(K)$, 使

$$\partial_{k+1} D_k = \pi_k - \pi'_k - D_{k-1}\partial_k$$

成立; 又 $D_k(\sigma^k)$ 是 K 的子复形 A_0, 这里 $\sigma^k = \pm(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1 \cdots \overset{*}{A}_k)$.

任取 $C_k(Sd\ K)$ 的一个基元 $\sigma^k = \pm(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1 \cdots \overset{*}{A}_k)$. $\pi_k(\sigma^k)$ 和 $\pi'_k(\sigma^k)$, 如前所述, 都是 K 的子复形 A_0, 又 $D_{k-1}(\partial\sigma^k)$ 也是子复形 A_0 的链.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \sigma^k & \mapsto & \partial_k\sigma^k \\
 & & \pitchfork & & \\
 & & C_k(Sd\ K) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(Sd\ K) \\
 & & \pi_k \downarrow \pi'_k & \swarrow D_{k-1} & \\
C_{k+1}(A_0) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(A_0) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(A_0) \\
 & & & & \\
 & & \pi_k(\sigma^k)-\pi'_k(\sigma^k)-D_{k-1}(\partial\sigma^k) & &
\end{array}$$

现在计算

$$\partial_k(\pi_k(\sigma^k) - \pi'_k(\sigma^k) - D_{k-1}(\partial_k\sigma^k)).$$

注意 π_k, π'_k 为链映射, D_{k-1} 适合归纳假设

$$\partial_k D_{k-1} = \pi_{k-1} - \pi'_{k-1} - D_{k-2}\partial_{k-1}.$$

所以

$$\partial_k(\pi_k(\sigma^k) - \pi'_k(\sigma^k) - D_{k-1}(\partial_k\sigma^k))$$

$$= \pi_{k-1}\partial_k(\sigma^k) - \pi'_{k-1}\partial_k(\sigma^k) - (\pi_{k-1}(\partial_k\sigma^k) -$$

$$-\pi'_{k-1}(\partial_k\sigma^k) - D_{k-2}\partial_{k-1}(\partial_k\sigma^k)) = 0.$$

即 $(\pi_k(\sigma^k) - \pi'_k(\sigma^k) - D_{k-1}(\partial_k\sigma^k)) \in \mathrm{Ker}(\partial_k : C_k(A_0) \to C_{k-1}(A_0))$. 但由于 A_0 为点状的, 故由 (6.18), 知

$$\mathrm{Ker}\ \partial_k = \mathrm{Im}\ \partial_{k+1}.$$

这样就有 $c_{k+1} \in C_{k+1}(A_0)$ 使

$$\partial_{k+1}c_{k+1} = \pi_k(\sigma^k) - \pi'_k(\sigma^k) - D_{k-1}(\partial_k\sigma^k).$$

将 c_{k+1} 视为 K 的 $(k+1)$ 维链，并记做 $D_k(\sigma^k)$. 这样就有

$$D_k : C_k(Sd\ K) \to C_{k+1}(K)$$

满足归纳假定，命题得证. ◁

¡ 在这个证明里面，我们完全实践了上面所说的，将 π 和 π'"纳入" 某个锥形来造链伦移的方案. 以下几步是它的具体体现:

1. 对 $Sd\ K$ 的每个单形 $A = (\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1 \cdots \overset{*}{A}_k)$, 规定好 K 中的一个点状子复形 $C(A)$(在这里是 A_0). 当 B 为 A 的面时，$C(B)$ 为 $C(A)$ 的子复形.

2. 归纳构作 D_k 的第一步，需要用到链映射 π 和 π' 是保持增广的. 但实际上只要 $\pi_{0_*} = \pi'_{0_*}$.

3. 构作出的 $\pi_k(\pm A)$ 和 $\pi'_k(\pm A)$ 以及 $D_k(\pm A)$ 一样，都是点状子复形 $C(A)$ 的链.

显然，以上几点合在一起，可用来证明任意两个链映射 $f = \{f_k : C_k(K) \to C_k(L)\}$ 和 g 为链同伦的.

我们先给出

7.17 定义 对复形 K 和 L, 函数 C 叫做是一个 **承载子**, 如果它对复形 K 的每个单形 A^r, 使 $C(A^r)$ 为 L 的一个非空子复形，并且满足条件：当 B^s 为 A^r 的面时，$C(B^s)$ 为 $C(A^r)$ 的子复形. 如果还有 $C(A^r)$ 均为点状的，称 C 为 **点状承载子**.

7.18 定义 复形 K, L 间的承载子 C, 叫做是承载链映射 $f = \{f_k : C_k(K) \to C_k(L)\}$ 的，如果对每个有向单形 $\sigma^k = +A^k$, 有 $f_k(\sigma^k)$ 为 $C_k(C(A^k))$ 的元. 同样，如果链伦移 $D : f \simeq g$ 有性质：$D_k(\sigma^k)$ 为 $C_{k+1}(C(A^k))$ 的元，则称 C 承载 D.

仿照 7.16. 我们有

7.19 定理 (点状承载子定理) 设 K 和 L 为复形，链映射 $f = \{f_k : C_k(K) \to C_k(L)\}$ 和 $g = \{g_k : C_k(K) \to C_k(L)\}$ 在 0 维同调群导出同一同态，又 f 和 g 均由同一个点状承载子

C 承载. 那么 f 和 g 是链同伦的, 而且连接 f 和 g 的链伦移 $D: f \simeq g$ 也由 C 承载.

证明 我们归纳地构作连接 f 和 g 的链伦移 D 如下:

先定义 $D_0: C_0(K) \to C_1(L)$.

任取 K 的一个顶点 a 来.

由假定, f 和 g 均由点状承载子 C 承载, 故 $f_0(+a)$ 和 $g_0(+a)$ 均为 $C(a)$ 的链, 而且由 $f_{0*} = g_{0*}$, 知 $f_0(+a) \sim g_0(+a)$. 即有 c_1 使 $\partial c_1 = f_0(+a) - g_0(+a)$. 由于 $C(a)$ 是点状的, 不妨设 c_1 为 $C(a)$ 的链. 于是命

$$D_0(+a) = c_1,$$

它就满足条件:

$$\partial D_0 = f_0 - g_0,$$

而且 D_0 由 C 承载.

现在假定当 $n < k$ 时, 已有

$$D_n : C_n(K) \to C_{n+1}(L)$$

使

$$\partial_{n+1} D_n = f_n - g_n - D_{n-1}\partial_n$$

成立, 而且 $D_n(+A^n)$ 是 L 的子复形 $C(A^n)$ 的链. 下面我们来定义 $D_k : C_k(K) \to C_{k+1}(L)$, 使类似条件成立.

任取 K 的一个 k 维有向单形 $+A^k$ 来, 那么按假定, $f_k(+A^k)$ 和 $g_k(+A^k)$ 都是 $C(A^k)$ 的链. 又按归纳假定及承载子的条件, 知 $D_{k-1}\partial_k(+A^k)$ 也是 $C(A^k)$ 的链.

现在计算

$$\partial_k(f_k(+A^k) - g_k(+A^k) - D_{k-1}\partial_k(+A^k)).$$

由 f,g 为链映射和 D_{n-1} 适合的条件，上式等于

$$f_{k-1}\partial_k(+A^k)-g_{k-1}\partial_k(+A^k)-(f_{k-1}\partial_k(+A^k)-$$

$$-g_{k-1}(+\partial_k A^k-D_{k-2}(\partial_{k-1}\partial_k(+A^k)))=0.$$

也即 $f_k(+A^k)-g_k(+A^k)-D_{k-1}\partial_k(+A^k)$ 为 $C(A^k)$ 的闭链. 但 $C(A^k)$ 为点状的，故由 (6.18)，有 $C(A^k)$ 的 $(k+1)$ 维链 c^{k+1} 使

$$\partial c^{k+1}=f_k(+A^k)-g_k(+A^k)-D_{k-1}\partial(+A^k).$$

于是命 $D_k(+A^k)=c^{k+1}$，并将 c^{k+1} 视为 L 的链. D_k 的归纳定义便完成. 从而得到由 C 承载的链伦移

$$D:f\simeq g. \qquad \triangleleft$$

¡ 注意两个保持增广的链映射，当然在 0 维同调群上导出同一同态.

有了上述定理，(7.16) 便是它的推论了. 实际上，将 $Sd\,K$ 的单形 $(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_k)$ 对应到 K 的子复形 A_0 的函数 C 便是一个点状承载子.

作为 (7.16) 和 (7.15) 的推论，我们有

7.20 推论 标准链映射在同调群上导出的同态均相等，叫做**标准同态**，记为

$$\pi_{k*}:H_k(SdK)\to H_k(K). \qquad \triangleleft$$

重分同态 Sd_{k*} 和标准同态 π_{k*} 间存在着互逆关系. 为此，我们先证

7.21 引理 标准链映射 $\pi_k:C_k(Sd\ K)\to C_k(K)$ 为重分链映射 $Sd_k:C_k(K)\to C_k(SdK)$ 的左逆：

$$\pi_k Sd_k=1:C_k(K)\to C_k(K).$$

证明 对维数用归纳法.

当 $k=0$ 时，$\pi_0 Sd_0 = 1$ 显然成立.

设 $k<q$ 时，结论成立. 下面考虑 $k=q$ 的情形.

对 $C_q(K)$ 的基元 $\sigma^q = +A_0$. 设 $Sd\ \sigma^q = \overset{*}{A}{}_0 Sd(\partial\sigma^q)$ 中包含有有向单形 $(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_q)$. 于是它经 π 作用后，或者是 $\pm\sigma^q$，或者是 0. 这样

$$\pi_q Sd_q \sigma^q = l\sigma^q, \quad l\in\mathbb{Z}.$$

将 ∂ 作用上去，得

$$\partial\pi_q Sd_q\sigma^q = \partial(l\sigma^q) = l\partial\sigma^q.$$

再用链映射的条件，

$$\partial\pi_q Sd_q\sigma^q = \pi_{q-1}Sd_{q-1}\partial\sigma^q.$$

及归纳假设，

$$\pi_{q-1}Sd_{q-1}\partial\sigma^q = \partial\sigma^q,$$

故有

$$l\partial\sigma^q = \partial\sigma^q,$$

这样 $l=1$. 于是归纳法完成. ◁

7.22 推论 以下的等式成立：

$$\pi_{k_*}Sd_{k_*} = 1 : H_k(K)\to H_k(K). \quad ◁$$

再来证明

7.23 引理 链映射 $Sd\circ\pi : C_k(Sd\ K)\to C_k(Sd\ K)$ 和恒同链映射 $1 : C_k(Sd\ K)\to C_k(Sd\ K)$ 都是保持增广的，而且它们有公共的点状承载子.

证明 因为 π 和 Sd 都是保持增广的，因此它们的合成还是保持增广的. 又 1 显然为保持增广，因此前一半成立.

下面证它们有公共的点状承载子.

给定 $Sd\ K$ 的单形 $(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_k)$. 那么它在 π_0 下的像为单形 A_0 的一个面. 再经 Sd 作用, 是 $Sd\ A_0$ 的一个链. 于是命 $Sd\ A_0$ 为 $(\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1\cdots\overset{*}{A}_k)$ 在承载子 C 下的像, 则 $Sd\circ\pi$ 和 1 均由 C 承载. 至于 $Sd\ A_0$ 的点状性, 由 $Sd\ A_0=\overset{*}{A}_0\ Sd\dot{A}_0$ (§6, 式 (*)), 即它为复形 $Sd\dot{A}_0$ 上的锥形立知. ◁

7.24 推论 (同调群的重分不变性) 重分同态

$$Sd_*: H_k(K)\to H_k(Sd\ K)$$

以标准同态 $\pi_*: H_k(Sd\ K)\to H_k(K)$ 为自己的逆. 特别, Sd_* 为同构.

证明 由引理 (7.23) 和定理 (7.19) 以及 (7.15), 我们有

$$Sd_*\pi_*=1.$$

另一方面, 由推论 (7.22), 有

$$\pi_*Sd_*=1.$$

故 π_* 为 Sd_* 的逆. ◁

7.25 推论 对于复形 K 而言, 我们有

$$H^k(K)\cong H^k(Sd\ K).$$

证明 这由上同调群完全由同调群决定 (5.13) 立知. ◁

以上是从同调的角度进行讨论. 对于上同调来讲, 相应结果可以通过取对偶而得到. 例如, 若 $\{f_k: C_k(K)\to C_k(L)\}$ 为链映射, 那么 $\{\mathrm{Hom}(f_k): C^k(L)\to C^k(K)\}$ 构成 **上链映射**, 即有等式

$$\delta_K^k\ \mathrm{Hom}(f_k)=\mathrm{Hom}(f_{k+1})\ \delta_L^k.$$

由于上式成立, 因此上链映射导出上同调群间的同态

$$f_*^k: H^k(L)\to H^k(K).$$

¡ f_*^k 的定义域是 L 的上同调群，值在 K 的上同调群中. 与 f 的方向正好相反. 所以是逆变的.

和链同伦的链映射在同调群上导出同一同态一样，两个上链映射 $\{f^k : C^k(L) \to C^k(K)\}$ 和 $\{g^k : C^k(L) \to C^k(K)\}$ 如果是 **上链同伦** 的，即有一串同态 $\{D^k : C^k(L) \to C^{k-1}(K)\}$ 使

$$\delta_K^{k-1} D^k + D^{k+1} \delta_L^k = f^k - g^k,$$

那么 $f_*^k = g_*^k : H^k(L) \to H^k(K)$. 特别，当 $f^k = \mathrm{Hom}(f_k)$, $g^k = \mathrm{Hom}(g_k)$, 而 $\{f_k\}$ 又和 $\{g_k\}$ 为链同伦时， $\{f^k\}$ 和 $\{g^k\}$ 为上链同伦的. 实际上，命 $D^k = \mathrm{Hom}(D_{k-1})$ 即可，这里 $\{D_k\}$ 是连接 $\{f_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 的链伦移.

关于上同调群的重分不变性，除了像 (7.25) 那样，可以通过同调群的重分不变性来证明，也可以利用上面所作的说明，直接证明 Sd_k 的对偶 $\mathrm{Hom}(Sd_k)$ 在上同调群上导出同构而得证. 这时只要注意 $\mathrm{Hom}(gf) = \mathrm{Hom}(f)\mathrm{Hom}(g), \mathrm{Hom}(1) = 1$.

至此，我们将重心重分后的复形和原复形间的同调关系讨论清楚. 当然，这个结果也是预料得到的. 因为 K 和 $Sd\,K$ 只是同一个多面体的两个不同的单纯剖分. 所以按照同调群的拓扑不变性，它们应该相等.

第二章 同调群的不变性

在上一章里面，我们已经证明了，复形经重分以后，它的同调群不变. 但这还不是我们所要的拓扑不变性. 那么可否利用已经证明的、关于同调群的重分不变性，来证明同调群的拓扑不变性呢？对此，Poincaré 有如下的"主猜测"(Hauptvermutung)：多面体的不同剖分有公共的 (同构) 重分 (不必为重心重分). 显然，在主猜测成立时，同调群的拓扑不变性就很容易从重分不变性得到. 但是一般来讲，主猜测并不成立 (1961 年，美数学家 Milnor 对维数 >5 的多面体，举出了反例. 不过 $n=3$ 时主猜测成立. 此为 Moise 在 20 世纪 50 年代证明). 因此，为了证明同调群的拓扑不变性，还得寻求别的途径.

所谓同调群的拓扑不变性，是说多面体 X 和 Y 如果同胚，那么它们的同调群 $H_k(X)$ 和 $H_k(Y)$ 同构. 因此，为了得到同调群的拓扑不变性，我们应该先在不同空间的同调群之间建立某种联系. 然后通过对这种联系的研究，再来得到同调群的拓扑不变性. 由于同调群都是具有群结构的代数系统，因此考察它们之间联系的最恰当工具应为同态. 可是两个空间之间如无任何联系，当然也就不能想象在它们的同调群之间会有某种确定的关系. 因此为了考察不同空间的同调群之间的关系，先得在这些空间之间建立联系. 而建立空间之间联系的最自然的事物是映射. 因此，下面我们来研究，空间之间的映射，如何在它们的同调群之间导出同态.

在进行正式的代数陈述以前，我们从几何上来观察一下，映射有无可能在同调群间建立联系.

我们已经知道，同调群是通过边界关系建立起来的. 因此要在同调群之间建立联系，只要能找到保持边界关系的联系就可以了. 以前我们曾经指出，拓扑变换这类特殊的映射保持边界关系.

但实际上，对图形及其边界做略为广义的了解，那么映射仍保持边界关系. 映射

$$f:[-1,1]\to[0,1]$$
$$x\mapsto|x|,$$

仍然保持 $-1,1$ 为 $[-1,1]$ 的边这个事实，也就是说 $f(-1)=1, f(1)=1$ 仍为像 $f([-1,1])$ 的边. 这时， $f([-1,1])$ 并不视为 $[0,1]$, 而是视为从 1 出发，先覆盖 $[0,1]$ 一次，然后再从 0 出发，将 $[0,1]$ 再覆盖一次，最后终止在 1. 所以在这种意义下， f 并不改变边界关系.

在这种看法之下，映射既然不改变边界关系. 当然就会在同调群间建立关系，但具体如何操作呢？已经知道同调群是通过复形来建立的，而同调群之间的联系要通过单纯映射才能建立. 而一般的映射并不将单形变为单形，也就是说，映射对于指定剖分来讲，并不是单纯的. 因此，第一步得将映射改造为单纯映射才行. 这种改造，在 1 维的情形，实际上已经在 (3.9) 中讨论过了；一般情形，可以仿照进行. 但由于同一映射，经改造后，得到的单纯映射并不唯一. 因此，还得对改造的方法精心设计，以使过渡到同调群后，得到的是同一同态. 最后还得对这种过渡到同调群的同态做进一步的探讨. 所有这些就是下一节的内容.

§8. 单纯逼近、同调群的拓扑不变性

这一节，我们先将一般的映射改造成单纯映射. 改造的原则是 **改造的办法可以多种多样，但它们过渡到同调群以后，得到的却应是同一个同态**. 我们还要讨论这些过渡到同调群的同态的性质 (特别是函子性). 由此得到同调群的拓扑不变性.

由 (7.6), 单纯映射是将顶点变为顶点、单形变为单形的“分片线性”映射. 可是一般的映射，不要说将单形变为单形，连顶点变为顶点也不一定对. 所以要从一般的映射得到单纯映射，第

一步就是要设法将它改造成把顶点变为顶点的映射. 这种改造, 我们实际上已经遇到过了, 这就是 $1:|SdK| \to |K|$ 这个映射. 这时 $Sd\ K$ 的顶点是 $\overset{*}{A}{}^k$. 由于 $\overset{*}{A}{}^k$ 是单形 A^k 的重心, 所以当 $k>0$ 时, 它已不是 K 的顶点. 所以恒同映射 1 并不将顶点变为顶点, 可由它决定的 π_0 却是. 我们回想一下 π_0 的定义 (7.12), 它将 $\overset{*}{A}{}^k$ 变为 A^k 的顶点. 注意 $\overset{*}{A}{}^k$ 在 K 中的承载单形就是 A^k, 所以 π_0 实际上是按下述原则改造 1 而得: 将 $Sd\ K$ 的点 $\overset{*}{A}{}^k$ 变成 $1(\overset{*}{A}{}^k)$ 在 K 中的承载单形 A^k 的顶点. 这样定义的 π_0 虽不唯一, 但由于是在承载单形 —- 点状承载子中变动, 因此由改造 1 而得的诸链映射 π 是链同伦的 (7.16). 所以, 在将一般的映射 φ 改造为单纯映射 f 时, 为了确保过渡到同调群以后, 得到同一个同态, 以下的原则仍应坚持: 改造只在像点的承载单形 —- 点状承载子的范围内进行. 参见定义 (8.1).

不过, 顶点变为顶点不一定就是单纯映射. 例如, 对于图 2.1 所示的 $\varphi: A^1 \to L$.

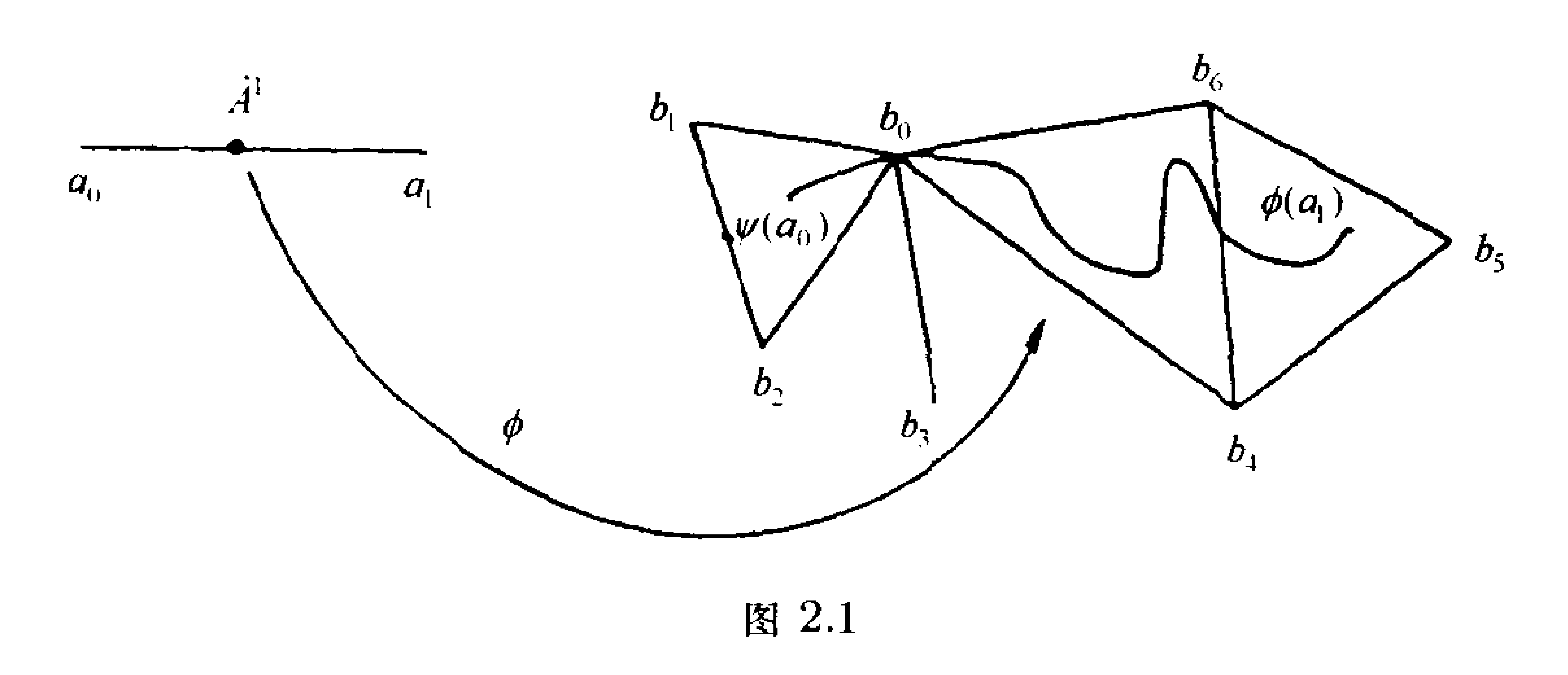


图 2.1

这时, 如取 $f(a_0)=b_1$ (它是 $\varphi(a_0)$ 的承载单形 $b_0b_1b_2$ 的一个顶点), $f(a_1)=b_5$. 由于 b_1, b_5 在 L 中不是某个单形的顶点, 因此无法线性扩充 f 而得到一个单纯映射. 所以光有顶点变为顶点还不能得到单纯映射.

不过在现在这个例子里面, 由于 $K=A^1$ 是线段, 我们在 §3 曾经讨论过, 并利用星形表达了 1 维情形时, 一个映射何时能成

为单纯映射，即只要 $f(a_1) \in St_L f(a_0)$，就能保证 f 为单纯映射. 对于一般的 K，我们仍可以用星形来表达顶点间的对应何时能成为单纯映射. 参见 (8.6).

不巧，对于一般的映射，它不一定有“星形性质”，因此无法保证一定能过渡到单纯映射去. 但“单纯逼近定理”说，只要重分的次数足够多，“星形条件”总能满足. 这样，过渡到单纯映射又成为可能.

在有了上述的准备以后，我们就能证明同调群的拓扑不变性.

需要指出的是：单纯逼近这样一种技术，不光是用来证明拓扑不变性. 实际上，它的用处很多，应该予以足够的重视.

8.1 定义 设 K, L 为复形，$\varphi : |K| \to |L|$ 为映射 (以后为简便计，称这种 φ 为映复形 K 入复形 L 的映射，并记为 $\varphi : K \to L$). 单纯映射 $f : K \to L$ 为 $\varphi : K \to L$ 的一个单纯逼近，如果对 $|K|$ 中的每一个点 x，$f(x)$ 都是 $\varphi(x)$ (在 L 中) 的承载单形的点.

例. $\pi_0 : SdK \to K$ 是 $1 : SdK \to K$ 的单纯逼近.

8.2 命题 如果对 $|K|$ 的每一个点 x，$f(x)$(在 L 中) 的承载单形是 $\varphi(x)$(在 L 中) 的承载单形的面. 那么单纯映射 $f : K \to L$ 是映射 $\varphi : K \to L$ 的单纯逼近.

证明 实际上，由 (1.13)，$f(x)$ 属于 $\varphi(x)$ 的承载单形等价于 $f(x)$ 的承载单形为 $\varphi(x)$ 的承载单形的面. 故得证. $\lhd$

8.3 命题 若 $f : K \to L$ 为单纯映射，那么对于 $|K|$ 中的任意一点 x, f 将 x 的承载单形映成 $f(x)$ 的承载单形.

证明 因为 f 将单形映成单形，因此只要证明，x 的承载单形经 f 作用后为 $f(x)$ 的承载单形就可以了.

设 $A^k = (a_0 a_1 \cdots a_k)$ 为 x 的承载单形，那么

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i, \quad \sum_i \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 0, 1, \cdots, k.$$

设 $f(A^k) = B^l = (b_0b_1\cdots b_l)$. 那么由 f 为单纯映射的定义, $f(x) = \sum_i \lambda_i f(a_i) = \sum_j \mu_j b_j$, 这里 $\sum_j \mu_j = \sum_i \lambda_i = 1$, 而 μ_j 是某些 λ_i 的和, 故也为正. 这就是说, $f(x)$ 为 B^l 的内点. 故 B^l 为 $f(x)$ 的承载单形. ◁

8.4 命题 如果对 $|K|$ 的每一个点 x, f 将 x(在 K 中) 的承载单形映成 $\varphi(x)$ 的承载单形的面. 那么单纯映射 $f: K \to L$ 为映射 $\varphi: K \to L$ 的单纯逼近.

证明 由 (8.3), f 将点 x 的承载单形映成 $f(x)$ 的承载单形. 所以由假定: f 将 x 的承载单形映成 $\varphi(x)$ 的承载单形的面, 知 $f(x)$ 的承载单形为 $\varphi(x)$ 的承载单形的面. 故由 (8.2), 知 f 为 φ 的单形逼近. ◁

上面讨论了映射及其单纯逼近之间的关系. 下面转入单纯逼近的存在性.

8.5 命题 复形 K 中有单形 $A^k = (a_0a_1\cdots a_k)$ 的充要条件是

$$\bigcap_i St_K a_i \neq \emptyset.$$

证明 先证必要性.

因为 $A^k = (a_0a_1\cdots a_k)$ 是 K 中的一个单形, 因此

$$\overset{*}{A}{}^k \in St_K a_i, \quad i = 0, 1, \cdots, k.$$

这样 $\bigcap_i St_K a_i \neq \emptyset$.

再证充分性.

设 $x \in \bigcap_i St_K a_i$, 那么由 $x \in St_K a_i$ 的定义, 知 a_i 为 x 的承载单形 B^l 的顶点, $i = 0, 1, \cdots, k$. 因此 $(a_0a_1\cdots a_k)$ 为 B^l 的面, 故为 K 中的一个单形. ◁

8.6 推论 复形 K, L 的顶点间的一个对应 f 适合条件: 对 K

的任一单形 $(a_0a_1\cdots a_k)$, 有

$$\bigcap_i St_L f(a_i) \neq \emptyset,$$

那么 f 决定一个单纯映射.

证明 由假定 $\bigcap_i St_L f(a_i) \neq \emptyset$ 和 (8.5) 知 $(f(a_0)f(a_1)\cdots f(a_k))$ 为 L 中的单形, 因此 f 将单形变为单形, 所以 f 决定的映射是单纯映射. ◁

8.7 命题 若 $f: K \to L$ 是单纯映射, 那么包含关系

$$f(St_K a) \subset St_L f(a) \tag{1}$$

对 K 的所有顶点 a 都成立.

证明 设 $x \in St_K a$, 那么由定义, a 是 x 的承载单形 C^k 的一个顶点. 于是 $f(a)$ 是单形 $f(C^k)$ 的一个顶点. 但由 (8.3), $f(C^k)$ 是 $f(x)$ 的承载单形, 因此 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的承载单形的一个顶点. 故 $f(x) \in St_L f(a)$. ◁

8.8 命题 若单纯映射 $f: K \to L$ 是映射 $\varphi: K \to L$ 的一个单纯逼近, 那么对于 K 的每个顶点 a, 成立有以下的包含关系:

$$\varphi(St_K a) \subset St_L f(a). \tag{2}$$

证明 设 $x \in St_K a$, 那么由定义, a 是 x 的承载单形 C^k 的一个顶点. 于是 $f(a)$ 是单形 $f(C^k)$ 的一个顶点. 但由 (8.3), $f(C^k)$ 为 $\langle f(x)\rangle$, 而 $f(x) \in \langle\varphi(x)\rangle$, 所以 $\langle f(x)\rangle$ 为 $\langle\varphi(x)\rangle$ 的面, 特别 $f(a)$ 为 $\langle\varphi(x)\rangle$ 的顶点, 故 $\varphi(x) \in St_L f(a)$. ◁

根据 (1) 和 (2), 我们有

8.9 定义 设 $\varphi: K \to L$ 是复形间的映射, 如果对于 K 的每个顶点 a, 都有 L 的顶点 b, 使

$$\varphi(St_K a) \subset St_L b,$$

则称 $\varphi: K \to L$ 具有星形性质.

利用星形性质，那么 (8.7) 可改述为：单纯映射具有星形性质，(8.8) 可改述为：具有单纯逼近的映射具有星形性质.

下面我们证明 (8.8) 的逆.

8.10 定理 若映射 $\varphi: K \to L$ 具有星形性质，那么 φ 有单纯逼近.

证明 分两步. 第一步利用星形性质造一个单纯映射 f, 第二步证明 f 为 φ 的单纯逼近.

设 a 为 K 的一个顶点，则由 φ 具有星形性质，知有 L 的顶点 b, 使

$$\varphi(St_K a) \subset St_L b.$$

命 $f(a) = b$. 现在来证明，顶点间的这个对应 f, 决定一个单纯映射.

任取 K 的一个单形 $A^k = (a_0 a_1 \cdots a_k)$. 设 $x = \overset{*}{A}{}^k$. 于是 $x \in St_K a_i, i = 0, 1, \cdots, k$. 故 $\varphi(x) \in \varphi(St_K a_i)$. 再按 f 的定义，$\varphi(St_K a_i) \subset St_L f(a_i)$. 于是 $\varphi(x) \in St_L f(a_i), i = 0, 1, \cdots, k$, 即 $\bigcap_i St_L f(a_i) \neq \emptyset$. 故由 (8.6), f 是单纯映射.

下面证明，这样决定的单纯映射 f 为映射 φ 的单纯逼近. 为此，由 (8.4), 只要证明：对任意的 $x \in |K|, f$ 将 x 的承载单形 $A = (a_0 a_1 \cdots a_k)$ 映成 $\varphi(x)$ 的承载单形的面，也即 $\varphi(x) \in St_L f(a_i), i = 0, 1, \cdots, k$ 即可.

因为 A 是 x 的承载单形, 故 $x \in St_K a_i, i = 0, 1, \cdots, k$. 于是 $\varphi(x) \in \varphi(St_K a_i)$, 而按 f 的取法，$\varphi(St_K a_i) \subset St_L f(a_i), i = 0, 1, \cdots, k$, 因此得证. ◁

¡ 由上面的证明可以看出，映射 φ 的单纯逼近并不唯一. 但是我们有

8.11 命题 设 $f_1: K \to L$ 和 $f_2: K \to L$ 是映射 $\varphi: K \to L$ 的两个单纯逼近，那么它们导出的链映射都是保持增广的，而且有公共的点状承载子，因此是链同伦的.

证明 显然，f_1 和 f_2 导出的链映射都和同态 ε 可交换. 因此是保持增广的.

至于它们有公共的点状承载子 C, 可以证明如下：设 A^k 为 K 的一个单形. 命 B^l 为 $\varphi(\overset{*}{A}{}^k)$ (在 L 中) 的承载单形. 那么规定 C 在 A^k 上的值为复形 B^l. 显然，这样规定的 C 为所需的点状承载子. ◁

8.12 **命题** 若单纯映射 $f: K \to L$ 和 $g: L \to M$ 分别为映射 $\varphi: K \to L$ 和 $\psi: L \to M$ 的单纯逼近，那么 $g \circ f: K \to M$ 就是映射 $\psi \circ \varphi: K \to M$ 的单纯逼近.

证明 按定义即知. ◁

命题 (8.8) 和定理 (8.10) 告诉我们，映射 $\varphi: K \to L$ 有单纯逼近的充要条件是 φ 有星形性质. 但一般来讲，映射 φ 不一定具有星形性质. 例如 K 是线段 a_0a_1, L 是折线段 $b_0bb_1, \varphi: K \to L$ “匀速”地将 K 映成 L.

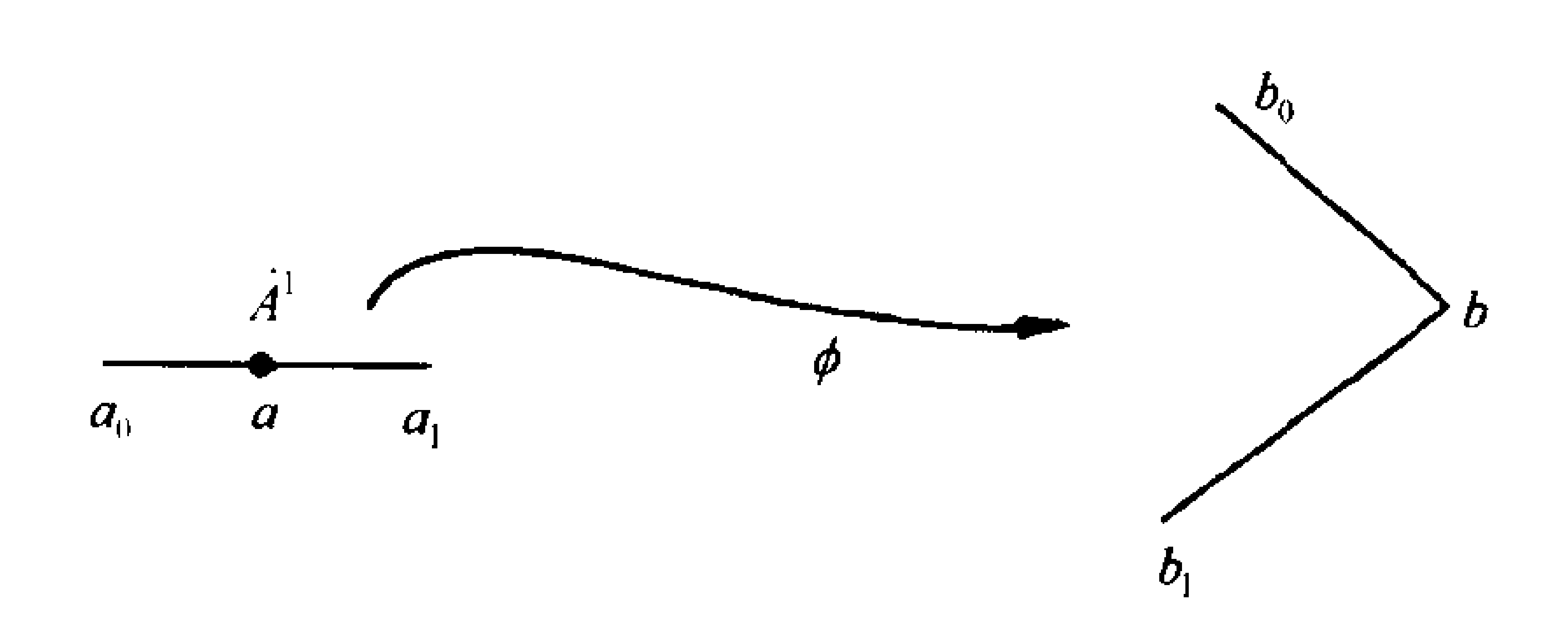


图 2.2

显然，这时 $\varphi: K \to L$ 不满足星形条件，因此也没有单纯逼近. 但是如果将 $|K|$ 剖分为具有顶点 a_0, a, a_1 及相应的 1 维单形 $(a_0a), (aa_2)$ 的复形 K' 以后， $\varphi: K' \to L$ 就具有星形性质，f(将 a_0, a, a_1 分别映为 b_0, b, b_1) 是它的一个单纯逼近.

为什么 $\varphi: K \to L$ 没有星形性质，而 $\varphi: K' \to L$ 有呢？原来，对于 K 来讲，星形“太大”，以致于它在 φ 下的像，不能整体的落在 L 的任何星形之中. 而经过改造后的 K', 它的星形变“小”了，这样就可以满足星形条件. 因此，我们自然会想到，一般的映射虽不适合星形条件，但能否将 K 剖分得更细，以使新的

星形能够适合星形条件呢？

关于将 K 剖分得更细、更小，我们在 §6 的 (6.10) 和 (6.11) 中已经看到，$Sd\,K$ 就具有这一性质.

8.13 定义 复形 K 的网眼为 $\max\limits_{A\in K}\{A$ 的直径 $\}$.

8.14 定义 对复形 K, 命 $Sd^{(0)}K=K, Sd^{(m)}K$ 为 $Sd^{(m-1)}K$ 的重心重分，$m\geq 1$.

8.15 定理 如果 K 为 n 维复形，其网眼 $\leq\eta$, 那么 $Sd^{(m)}K$ 的网眼 $\leq\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^m\eta$.

证明 由 (6.11), $Sd\,K$ 的网眼 $\leq\dfrac{n}{n+1}\eta$. 余下的对 m 行归纳法即可. ◁

上述定理表明，只要重分的次数足够多，每个单形的直径均可任意小. 这就为单纯逼近的存在提供了保证.

8.16 定理 （单纯逼近的存在性定理） 设 K,L 为复形，$\varphi: K\to L$ 为映射. 那么存在整数 $m\geq 0$, 使映射 $\varphi: Sd^{(m)}K\to L$ 具有星形性质，因此存在着单纯逼近.

证明 显然 $\{St(b)|b$ 为 L 的顶点 $\}$ 是多面体 $|L|$ 的一个开覆盖. 因此 $\{\varphi^{-1}(St(b))\}$ 是 $|K|$ 的一个开覆盖. 对紧集 $|K|$ 的这个开覆盖，存在着 Lebesgue 数 $\varepsilon>0$, 使 $|K|$ 中直径 $<\varepsilon$ 的任一子集，必属于某个 $\varphi^{-1}(St(b))$. 实际上，如果这种 ε 不存在，那么相应于 $\frac{1}{n}$, 有 $|K|$ 中的子集 M_n, 其直径小于 $\frac{1}{n}$, 但却不属于任何 $\varphi^{-1}(St(b))$, 这里 $n=1,2,\cdots$. 任取 $x_n\in M_n$, 则 $\{x_n\}$ 有收敛的子序列 $\{x_{n_i}\}$. 设其极限为 x_0. 则由 $\{\varphi^{-1}(St(b))\}$ 为开覆盖，知有某个 b_0, 使 $x_0\in\varphi^{-1}(St(b_0))$. 设 x_0 到 $\varphi^{-1}(St(b_0))$ 的余集 (注意，它是闭集) 的距离为 δ. 则存在 $N>\frac{2}{\delta}$, 使 $n_i>N$ 时，$\rho(x_{n_i},x_0)<\frac{\delta}{2}$, 这时对 M_{n_i} 中的任意一点 x, 有

$$\rho(x,x_0)\leq\rho(x,x_{n_i})+\rho(x_{n_i},x_0)<\frac{1}{n_i}+\frac{\delta}{2}<\frac{1}{N}+\frac{\delta}{2}<\delta,$$

也即 $M_{n_i}\subset\varphi^{-1}(St(b_0))$, 与 M_{n_i} 的取法矛盾！故有上述的 ε 存在.

对此 ε, 由 (8.15), 知有整数 $m \geq 0$, 使 $Sd^{(m)}K$ 的单形的直径都 $< \frac{\varepsilon}{2}$. 于是 $Sd^{(m)}K$ 中的星形, 其直径都小于 ε. 因此它们经 φ 作用后, 落在某个 $St(b)$ 中, 即星形性质成立. ◁

¡ 作为映射, $\varphi: K \to L$ 和 $\varphi: Sd^{(m)}K \to L$ 相同. 但前者不一定具有星形性质, 因此也就不保证单纯逼近的存在. 可是后者, 只要 m 足够大, 就具有星形性质, 因此也就存在单纯逼近.

下面的定理, 阐述了不同的单纯逼近之间存在的关系.

8.17 定理 对映射 $\varphi: K \to L$, 若 $m, n \geq 0$, 使 $\varphi: Sd^{(m)}K \to L$ 和 $\varphi: Sd^{(n)}K \to L$ 都具有星形性质, 设 $f: Sd^{(m)}K \to L$ 和 $f': Sd^{(n)}K \to L$ 分别为它们的单纯逼近, 那么图

$$\begin{array}{ccc} H_k(K) & \xrightarrow{Sd_*^{(m)}} & H_k(Sd^{(m)}K) \\ \downarrow Sd_*^{(n)} & & \downarrow f_{k*} \\ H_k(Sd^{(n)}K) & \xrightarrow{f'_{k*}} & H_k(L) \end{array}$$

可换, 其中 $Sd_*^{(l)}$ 为 l 个重分同态 $H_k(K) \to H_k(SdK) \to \cdots \to H_k(Sd^{(l)}K)$ 的合成.

证明 不妨假定 $n \geq m+1$. 以 $Sd^{(m,n)}: Sd^{(m)}K \to Sd^{(n)}K$ 表示 $(n-m)$ 个重分链映射 $Sd^{(m)}K \to Sd^{(m+1)}K \to \cdots \to Sd^{(n)}K$ 的合成. 于是

$$Sd^{(m,n)} \circ Sd^{(m)} = Sd^{(n)}.$$

故有

$$Sd_*^{(m,n)} \circ Sd_*^{(m)} = Sd_*^{(n)}: H_k(K) \to H_k(Sd^{(n)}K).$$

另一方面, 以 $\pi^{(n,m)}$ 表示 $(n-m)$ 个标准映射

$$Sd^{(n)}K \to Sd^{(n-1)}K \to \cdots \to Sd^{(m)}K$$

的合成. 那么由 (7.24), 得

$$\pi_*^{(n,m)} = Sd_*^{(m,n)^{-1}}.$$

按假定，$f' : Sd^{(n)}K \to L$ 是 $\varphi : Sd^{(n)}K \to L$ 的单纯逼近. 又 $\pi_0 : SdK \to K$ 为恒同映射 $1 : SdK \to K$ 的单纯逼近，故由 (8.12), 知

$$f \circ \pi^{(n,m)} : Sd^{(n)}K \to L$$

也是 $\varphi : Sd^{(n)}K \to L$ 的单纯逼近. 故由 (8.11), 有

$$f'_* = (f \circ \pi^{(n,m)})_* : H_k(Sd^{(n)}K) \to H_k(L).$$

又由 (7.11), 得

$$f'_* = f_* \circ \pi_*^{(n,m)}.$$

于是

$$\begin{aligned} f'_* \circ Sd_*^{(n)} &= f_* \circ \pi_*^{(n,m)} \circ Sd_*^{(n)} \\ &= f_* \circ \pi_*^{(n,m)} \circ Sd_*^{(m,n)} \circ Sd_*^{(m)} = f_* \circ Sd_*^{(m)}. \end{aligned}$$

故定理得证. ◁

有了这个定理，以下的定义便是合理的.

8.18 定义 给定映射 $\varphi : K \to L$, 设 $m \geq 0$ 使 $\varphi : Sd^{(m)}K \to L$ 有单纯逼近 $f : Sd^{(m)}K \to L$. 称与 m 和 f 无关的同态

$$H_k(K) \xrightarrow{Sd_*^{(m)}} H_k(Sd^{(m)}K) \xrightarrow{f_*} H_k(L)$$

为由 φ 所导出的同调群间的同态，记为 φ_{k*}.

至此，我们不仅完成了，从映射往单纯映射的过渡，而且完成了，从映射到同调群间同态的过渡.（这种过渡的必要性，已在上节末指出.）

下面是有关 φ_{k*} (在不强调 k 时，将简记为 φ_*) 的一些简单性质.

8.19 定理 恒同映射 $1 : K \to K$ 导出恒同同态，即

$$1_* = 1 : H_k(K) \to H_k(K).$$

证明 显然. ◁

8.20 定理 设 $\varphi: K \to L$ 和 $\psi: L \to M$ 都是映射，那么

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* : H_k(K) \to H_k(M).$$

证明 设 n 足够大，使 $\psi: Sd^{(n)}L \to M$ 有单纯逼近 g. 于是

$$\psi_* = g_* \circ Sd_*^{(n)} : H_k(L) \to H_k(M).$$

对 $\varphi: K \to Sd^{(n)}L$，设 m 使它有单纯逼近 $f: Sd^{(m)}K \to Sd^{(n)}L$. 命 $\pi^{(n)}$ 为下述诸标准映射

$$Sd^{(n)}L \to Sd^{(n-1)}L \to \cdots \to L$$

的合成，则

$$\pi^{(n)} \circ f : Sd^{(m)}K \to L$$

为 $1 \circ \varphi = \varphi$ 的单纯逼近 (8.12). 因此

$$\varphi_* = (\pi^{(n)} \circ f)_* \circ Sd_*^{(m)} = \pi_*^{(n)} f_* Sd_*^{(m)}.$$

注意，$f: Sd^{(m)}K \to Sd^{(n)}L$ 为 $\varphi: Sd^{(m)}K \to Sd^{(n)}L$ 的单纯逼近，$g: Sd^{(n)}L \to M$ 为 $\psi: Sd^{(n)}L \to M$ 的单纯逼近，因此由 (8.12)，知 $g \circ f$ 为 $\psi \circ \varphi: Sd^{(m)}K \to M$ 的单纯逼近.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L & \xrightarrow{\psi} & M \\
 & & | & \psi \nearrow g & \\
K & \xrightarrow{\varphi} & Sd^{(n)}L & & \\
| & \varphi \nearrow f & & & \\
Sd^{(m)}K & & & &
\end{array}$$

于是

$$(\psi \circ \varphi)_* = (g \circ f)_* \circ Sd_*^{(m)} = g_* f_* Sd_*^{(m)}.$$

但是

$$\psi_* \circ \varphi_* = g_* Sd_*^{(n)} \circ \pi_*^{(n)} f_* Sd_*^{(m)} = g_* f_* Sd_*^{(m)}.$$

所以

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*. \qquad \triangleleft$$

有了以上的准备, 现在就可以来证明同调群的拓扑不变性了.

8.21 定理 (同调群的拓扑不变性) 设 $\varphi : K \to L$ 为拓扑映射, 则

$$\varphi_* : H_k(K) \to H_k(L)$$

为同构.

证明 设 $\psi : L \to K$ 为 φ 的同胚逆, 即

$$\psi\varphi = 1_K, \quad \varphi\psi = 1_L.$$

于是由 (8.20) 和 (8.19), 得

$$\psi_*\varphi_* = 1, \quad \varphi_*\psi_* = 1.$$

故 φ_* 为同构. ◁

§9. 同调群的同伦不变性

在上一节里, 我们完成了有关同调群的拓扑不变性的证明. 在这个证明里面, 从映射 $\varphi : K \to L$ 过渡到同态 $\varphi_* : H_k(K) \to H_k(L)$ 是主要的一步. 其次是这种过渡具有函子性, 即 (8.19) 和 (8.20) 成立. 但是在由 φ 过渡到 φ_* 时, 决定性的一步是设法使映射能用单纯映射来代替. 因此, 如果两个映射有相同的单纯逼近, 那么它们过渡到同调群上的同态就相同. 一个映射有单纯逼近的充要条件是它具有星形性质. 所以两个映射有同一个单纯逼

近的充分条件，当然就是它们适合“同一组”星形条件. 即，对映射 $\varphi_i : K \to L$ 而言， $i=1,2$, 如果有

$$\varphi_i(St_K a) \subset St_L b, \quad i=1,2, \tag{1}$$

那么它们在同调群上导出的同态就是同一个.

显然，如果映射 φ_1 和 φ_2 “相距不远”，特别 φ_2 是由 φ_1 经过一个方向的“小扰动”而得. 那么条件 (1) 满足. 因此在同调群上导出同一个同态. 于是，从映射 φ_0 出发，先给它一个方向的“小扰动”，得到 φ_0'，再给 φ_0' 以另一方向的“小扰动”. 这样下去，最后得到的映射就会和 φ_0 相差很大，可它们在同调群上却导出同一同态. 将此过程精确化和尽可能地加以引伸，我们就有

9.1 定义 设 X, Y 为空间，映射 $\varphi_0 : X \to Y$ 和 $\varphi_1 : X \to Y$ 叫做是 **同伦的**，如果存在一组对 $t(0 \le t \le 1)$ 也连续的映射

$$\varphi_t : X \to Y.$$

因此当 t 从 0 变到 1 时， φ_0“连续地形变”成 φ_1.

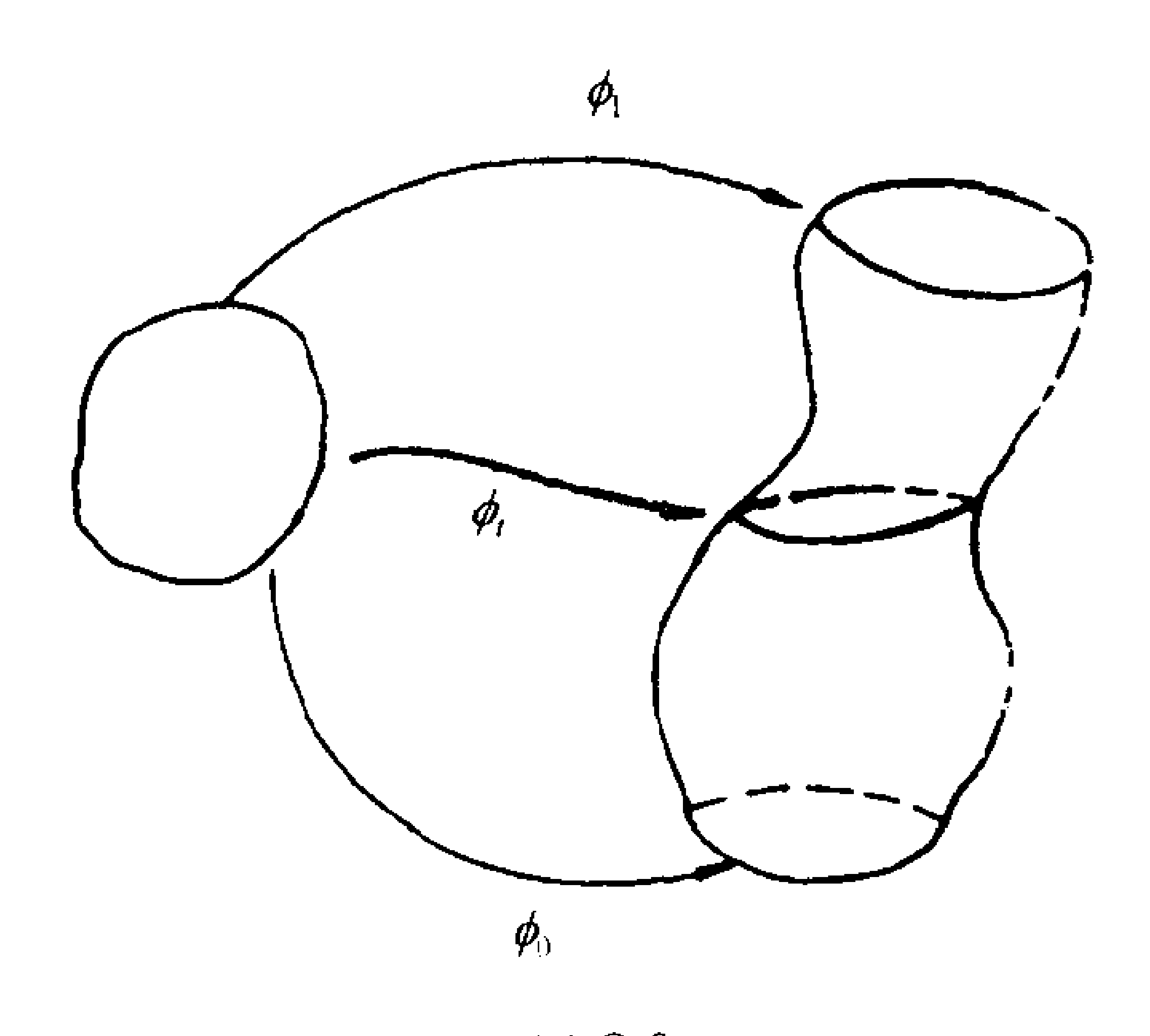


图 2.3

或者等价地，存在映射

$$H : X \times I \to Y,$$

(这里 $I = [0,1]$) 使 $H(x,t) = \varphi_t(x)$, 特别 $H(x,0) = \varphi_0(x)$, $H(x,1) = \varphi_1(x)$. 这时称 H 为连接 φ_0 和 φ_1 的 **伦移**, 记为 $H : \varphi_0 \simeq \varphi_1$. 当不强调 H 时, 只写 $\varphi_0 \simeq \varphi_1$.

9.2 例 映射 $\varphi : K \to L$ 和它的单纯逼近 $f : K \to L$ 是同伦的. (为什么?)

9.3 命题 同伦是 X 到 Y 的所有映射所构成的集合 Map (X,Y) 上的一个等价关系, 即有

1) $\varphi \simeq \varphi$;

2) 若 $\varphi \simeq \psi$, 则 $\psi \simeq \varphi$;

3) 若 $\varphi \simeq \psi, \psi \simeq \chi$, 则 $\varphi \simeq \chi$.

证明 1) 这时命

$$H : X \times I \to X$$

为 $H(x,t) = \varphi(x), x \in X, t \in I$. 则 $H : \varphi \simeq \varphi$.

2) 设 $H : \varphi \simeq \psi$, 即 $H : X \times I \to Y$ 使 $H(x,0) = \varphi(x), H(x,1) = \psi(x), x \in X$. 那么命

$$H' : X \times I \to Y$$

为 $H'(x,t) = H(x,1-t), x \in X, t \in I$. 则 $H'(x,0) = H(x,1) = \psi(x), H'(x,1) = H(x,0) = \varphi(x)$. 故 $H' : \psi \simeq \varphi$.

3) 设 $H_1 : \varphi \simeq \psi, H_2 : \psi \simeq \chi$. 命

$$H : X \times I \to Y$$

为

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x,2t), & x \in X, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ H_2(x,2t-1), & x \in X, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

显然 H 连续, 而且 $H : \varphi \simeq \chi$. ◁

9.4 定义 在同伦关系下, 集合 Map(X,Y) 被分成一些等价类, 每个等价类叫做一个同伦类, 同伦类的全体记为 $[X,Y]$.

¡ 当 $X(Y)$ 具有某种性质时，集合 $[X,Y]$ 有群结构. 对 $[X,Y]$ 进行研究，属于同伦论的范畴. 不过，它和同调论关系十分密切.

9.5 引理 若复形 K,L 间的映射 φ_0 和 φ_1 同伦，H 是连接它们的伦移，即 $H:\varphi_0\simeq\varphi_1$，那么存在着正整数 M 和整数 $r(\geq 0)$，使对 $k=1,\cdots,M$，映射 $\varphi_{\frac{k-1}{M}}$ 和 $\varphi_{\frac{k}{M}}:Sd^{(r)}K\to L$ 满足同一个星形条件，因此有一个公共的单纯逼近 $f^{(k)}:Sd^{(r)}K\to L$.

证明 因为 L 的全部星形 $\{St_Lb_j\}$ 构成 L 的一个开覆盖，因此 $\{H^{-1}(St_Lb_j)\}$ 就是 $|K|\times I$ 的一个开覆盖. 设 δ 是相应于这个开覆盖的 Lebesgue 数，即 $|K|\times I$ 中任意一个直径 $<\delta$ 的子集，必属于某个 $H^{-1}(St_Lb_j)$. 由 (8.15)，存在整数 $r\geq 0$，使 $Sd^{(r)}K$ 的每一个星形 Sta_i，它的直径一定 $<\frac{\delta}{2}$，又有足够大的 M 使 $\frac{1}{M}<\frac{\delta}{2}$. 于是 $Sta_i\times\left[\frac{k-1}{M},\frac{k}{M}\right]$ 的直径就 $<\delta$. 因此属于某个 $H^{-1}(St_Lb_j)$，也即

$$\varphi_{\frac{k-1}{M}}=H\left(\quad,\frac{k-1}{M}\right):Sd^{(r)}K\to L$$

和

$$\varphi_{\frac{k}{M}}:Sd^{(r)}K\to L$$

都满足

$$\varphi_m(Sta_i)\subset St_Lb_j,\quad m=\frac{k-1}{M},\frac{k}{M}.$$

于是 $\varphi_{\frac{k-1}{M}}$ 和 $\varphi_{\frac{k}{M}}$ 有公共的单纯逼近 $f^{(k)},k=1,\cdots,M$. ◁

9.6 推论 设 K,L,φ_0,φ_1 和 H 同上. 那么

$$\varphi_{0*}=\varphi_{1*}:H_k(K)\to H_k(L).$$

证明 已知 $\varphi_{\frac{k-1}{M}}$ 和 $\varphi_{\frac{k}{M}}$ 有公共的单纯逼近 $f^{(k)},k=1,\cdots,M$. 于是

$$\varphi_{0*}=f_*^{(1)}\circ Sd_*^{(r)}=\varphi_{\frac{1}{M}*}=f_*^{(2)}Sd_*^{(r)}=\cdots=f_*^{(M)}Sd_*^{(r)}=\varphi_{1*}.$$

◁

9.7　定义　空间 X 和 Y 叫做具有同一个 **同伦型**, 或者 **同伦等价**, 记为 $X \simeq Y$, 如果存在映射 $\varphi : X \to Y$ 和 $\psi : Y \to X$, 使

$$\psi \cdot \varphi \simeq 1_X, \quad \varphi \cdot \psi \simeq 1_Y.$$

这时称 φ, ψ 互为同伦逆, 也称 $\varphi(\psi)$ 为同伦等价 (映射).

显然, 空间之间的同伦等价 "$\simeq$" 是一个等价关系. 两个同胚的空间必定有相同的同伦型. 但反过来却不一定对. 例如, n 维实心球 E^n 和由一个点组成的空间 (称为单点空间)P 有同一同伦型, 但不同胚.

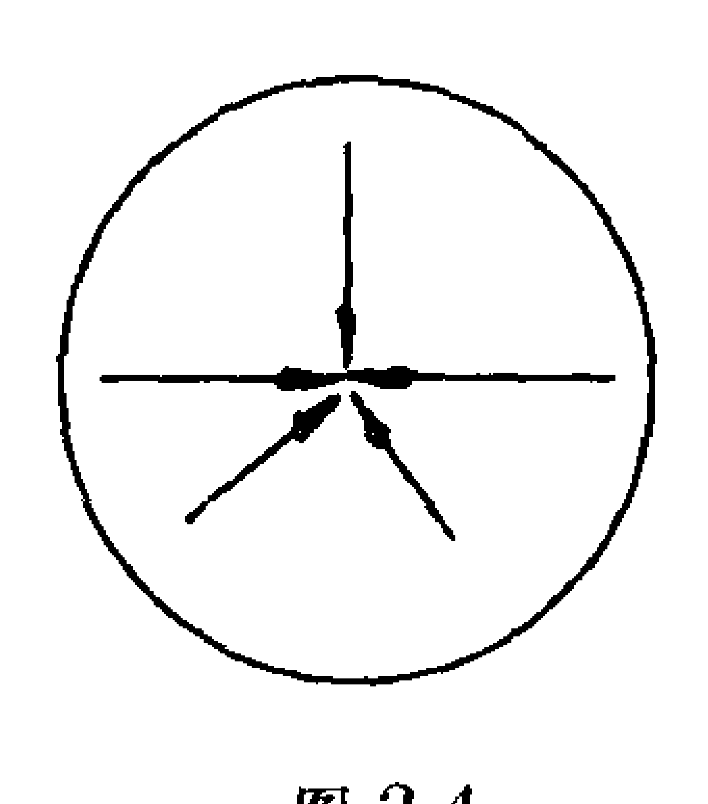


图 2.4

同伦型相同的空间所共有的性质称为同伦不变性. 根据上面讲的. 拓扑不变性一定是同伦不变性. 但反过来不一定对.

在 (8.21) 中, 我们已经证明了同调群的拓扑不变性. 下面我们证明, 它实际上还是同伦型不变量.

9.8　定理　(同调群的同伦不变性)　若多面体 $|K|$ 和 $|L|$ 同伦等价, 则它们的同调群同构. 并且, 当映射 $\varphi : K \to L$ 为同伦等价时, 它导出的同态

$$\varphi_* : H_k(K) \to H_k(L)$$

为同构.

证明　设 $\psi : L \to K$ 为 φ 的同伦逆, 那么

$$\psi\varphi \simeq 1_K, \quad \varphi\psi \simeq 1_L.$$

故由 (9.6), (8.19) 和 (8.20), 我们有

$$\psi_*\varphi_* = 1, \quad \varphi_*\psi_* = 1.$$

于是 φ_* 为同构, K 和 L 有同构的同调群. ◁

由于同调群是同伦不变量, 因此柱面和 Möbius 带有相同的同调群 (参见 (2.5) 和 (2.6)) 就不奇怪了, 因为它们有同一同伦型 (为什么?). 又实心圆盘 E^2, 锥形有相同的同调群也可由它们都和单点空间 P 具有同一同伦型而知. 这些例子表明, 由于同调群是同伦不变量, 因此想用它来区分不同胚的空间是不行的. 另一方面, 在进行同调群的计算时, 可以在同伦型相同的空间中, 选同调群较易计算的一个作为代表来予以计算即可.

有了同调群的拓扑不变性和同伦不变性以后, 当然就很容易得到上同调群的相应性质. 只是这时要对映射 $\varphi: K \to L$, 定义 $\varphi_*^*: H^k(L) \to H^k(K)$ 并且论证这种过渡也有函子性. 不过, 这些都不难从对比于 φ_* 的过程取对偶而得到. 因此细节留给读者自己完成.

第三章　相对同调群及其不变性

我们已经介绍了建立在边界关系上的同调群. 具体讲, 就是利用图形是否为边界这个具有拓扑不变性的事实, 而将空间中是边界的部分 "略而不计". 但很容易想到, 如果在空间 X 中指定一个子空间 A, 并且在 X 中将 "略而不计" 的部分把 A 也包括进去, 那么只要在拓扑变换下, 将 A 的相应部分也 "略而不计", 我们就也可以得到拓扑的不变量. 当然, 这时的不变量是 X 相对于 A 的不变量. (原来的不变量, 相应于 $A=\emptyset$, 故可作为绝对的). 基于这种想法所得到的同调群 $H_k(X,A)$, 首先是由 Lefschetz 在 1927 年引进. 相对同调群的出现, 表面上看, 似乎既不难想像, 也不难掌握, 但由于它和同调群 $H_k(X)$ 和 $H_k(A)$ 关系密切 (这一点也是在意料之中的), 所以实际上它很重要. 此外, 它又是 Eilenberg-Steenrod 公理化同调论的出发点, 因此不能忽视.

§10. 相对同调群、正合同调序列

在正式介绍相对同调群的定义之前, 我们仔细地看一下, 整个过程应该怎样进行.

对于多面体 $X=|K|$ 而言, 子空间 A 的自然取法当然应该是 $|L|$, 这里 L 为 K 的子复形. 以后称 (K,L) 为 **复形偶**. 对于 K 的 k 维链 x^k, 我们可以按 L 把它分成两部分:

$$x^k=\sum_i \alpha_i\sigma_i^k=\sum_{\sigma_i^k\in C_k(L)}\alpha_i\sigma_i^k+\sum_{\sigma_i^k\in C_k(K\backslash L)}\alpha_i\sigma_i^k,$$

(注意 $K\backslash L$ 不是子复形, 因为它里面的单形, 其面可能有一部分落在 L 中, 但 $C_k(K\backslash L)$ 的意义是清楚的), 由于来自 $A=|L|$ 的

部分忽略不计，因此在相对的情形，只取

$$\overline{x}^k = \sum_{\sigma_i^k \in C_k(K\setminus L)} \alpha_i \sigma_i^k$$

作为 (K 相对于 L 的) 链，$\overline{x}^k$ 的边缘

$$\partial_k \overline{x}^k = \sum_{\sigma_i^k \in C_k(K\setminus L)} \alpha_i \partial \sigma_i^k = \sum_j \beta_j \sigma_j^{k-1}$$

也分成两部分：

$$\partial_k \overline{x}^k = \sum_{\sigma_j^{k-1} \in C_{k-1}(L)} \beta_j \sigma_j^{k-1} + \sum_{\sigma_j^{k-1} \in C_{k-1}(K\setminus L)} \beta_j \sigma_j^{k-1},$$

而且作为 (相对的) 边缘，仍应不计属于 $A = |L|$ 的部分，故得

$$\overline{\partial}_k \overline{x}^k = \sum_{\sigma_j^{k-1} \in C_{k-1}(K\setminus L)} \beta_j \sigma_j^{k-1}.$$

于是 Ker $\overline{\partial}_k$ 就是 $C_k(K)$ 中这样的链 x^k, 它的边缘 $\partial x^k \in C_{k-1}(L)$, 而 Im $\overline{\partial}_{k+1}$ 是 $C_k(K)$ 中，可以写成 $\partial x^{k+1} - y^k$ 的链，这里 $x^{k+1} \in C_{k+1}(K), y^k \in C_k(L)$.

很容易证明 $\overline{\partial}_k \overline{\partial}_{k+1} = 0$, 而相对同调群 $H_k(K, L)$ 就定义为

$$\text{Ker } \overline{\partial}_k / \text{Im } \overline{\partial}_{k+1}.$$

所以 $H_k(K, L)$ 只依赖于 K 中位于 L 之外和边与 L 有关的那部分单形.

以上结合几何考虑的想法，可用严格的代数语言写出来，从而获得相对同调群.

注意，x^k 的分解 $\sum_{\sigma_i^k \in C_k(L)} \alpha_i \sigma_i^k + \sum_{\sigma_i^k \in C_k(K\setminus L)} \alpha_i \sigma_i^k$，实际上是由

$$C_k(K) = C_k(L) \oplus C_k(K\setminus L)$$

来. 而 $\overline{x}^k = \sum_{\sigma_i^k \in C_k(K\backslash L)} \alpha_i \sigma_i^k$ 可以看作是商群

$$C_k(K\backslash L) = C_k(K)/C_k(L)$$

的元. 因此定义 **复形 K 相对于子复形 L 的链群** $C_k(K,L) = C_k(K)/C_k(L)$. 由于 $\partial_k : C_k(K) \to C_{k-1}(K)$ 限制在 L 上有

$$\partial_k | C_k(L) : C_k(L) \to C_{k-1}(L).$$

故 ∂_k 导出

$$\tilde{\partial}_k : \frac{C_k(K)}{C_k(L)} \to \frac{C_{k-1}(K)}{C_{k-1}(L)}$$

即 [1]

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_k : C_k(K,L) &\to C_{k-1}(K,L) \\ \overset{*}{x}{}^k &\mapsto (\partial_k x^k)^*. \end{aligned}$$

称它为 **K 相对于 L 的边缘同态**. 于是 $\tilde{\partial}_k$ 和 ∂_k 间有关系, 即下图可换:

$$\begin{array}{ccc} C_k(K) & \xrightarrow{j_k} & C_k(K,L) \\ \downarrow \partial_k & & \downarrow \tilde{\partial}_k \\ C_{k-1}(K) & \xrightarrow{j_{k-1}} & C_{k-1}(K,L), \end{array} \qquad (1)$$

这里 $j_k : C_k(K) \to C_k(K,L) = C_k(K)/C_k(L)$ 为商同态.

10.1 命题 $\tilde{\partial}_k \tilde{\partial}_{k+1} = 0$.

证明 因为 $\tilde{\partial}_k$ 是由 ∂_k 导出, 故由 $\partial_k \partial_{k+1} = 0$, 立知 $\tilde{\partial}_k \tilde{\partial}_{k+1} = 0$. ◁

称 $\{C_k(K,L), \tilde{\partial}_k\}$ 为复形偶 (K,L) 的 **相对链复形**, 有时也略去“相对”二字, 而称之为 (K,L) 的链复形.

---

1) $\overset{*}{x}{}^k$ 表示 $x^k \in C_k(K)$ 在 $C_k(K,L)$ 中的陪集.

10.2　定义　复形 K 相对于子复形 L 的第 k 个闭链群 $Z_k(K, L) = \text{Ker}\ \tilde{\partial}_k$, 边缘链群 $B_k(K, L) = \text{Im}\ \tilde{\partial}_{k+1}$, 而同调群

$$H_k(K, L) = \frac{Z_k(K, L)}{B_k(K, L)}.$$

有时也分别简称它们为 **复形偶** (K, L) **的 第** k **个 闭链群, 边缘链 群** 和 **同调群**.

¡ 当 $L = \emptyset$ 时, $H_k(K, L) = H_k(K)$, 故也称 $H_k(K)$ 为 **绝对同调群**.

10.3　例.　设 $L = a$ 为复形 K 的一个顶点,我们来计算 $H_k(K, a)$.

设 $K_1, \cdots, K_q$ 为 K 的全部组合分支. a 为 K_1 的顶点. 那么由

$$\begin{aligned} C_k(K, a) &= C_k(K_1) \ominus \cdots \oplus C_k(K_q)/C_k(a) \\ &= C_k(K_1, a) \oplus C_k(K_2) \oplus \cdots \oplus C_k(K_q), \end{aligned}$$

立知

$$H_k(K, a) = H_k(K_1, a) \oplus H_k(K_2) \oplus \cdots \oplus H_k(K_q), \quad k \geq 0.$$

因此, 只要考虑 $H_k(K_1, a)$, 这时 K_1 为连通的.

设 K_1 的顶点为 $a, a_1, \cdots, a_m$. 由于这时子复形 $L = a$ 是单点空间, 故 $C_k(L) = 0, k > 0$. 于是

$$C_k(K_1, a) = C_k(K_1), \quad k \geq 1,$$

$$C_0(K_1, a) = C_0(K_1)/C_0(a);$$

$$\tilde{\partial}_k = \partial_k, \quad k > 1.$$

这样

$$H_k(K_1, a) = H_k(K_1), \quad k > 1.$$

现在来考虑

$$\tilde{\partial}_1 : C_1(K_1, a)(= C_1(K_1)) \to C_0(K_1, a).$$

10.4 命题 上述的 $\tilde{\partial}_1$ 为满同态，而且

$$\text{Ker } \tilde{\partial}_1 = \text{Ker } \partial_1.$$

证明 因为 $a, a_1, \cdots, a_m$ 为 K_1 的全部顶点，而 $C_0(K_1, a) = C_0(K_1)/C_0(a)$，因此 $C_0(K_1, a)$ 的元呈 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$ 形状．由于 $C_1(K_1, a) = C_1(K_1)$ 而 K_1 又连通，因此有 x_i^1 使 $\partial_1 x_i^1 = a_i - a$．于是 $\tilde{\partial}_1 \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i^1 \right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$．故 $\tilde{\partial}_1$ 为满．

现在设 $z^1 \in C_1(K_1, a) = C_1(K_1)$ 使 $\tilde{\partial}_1 z^1 = 0$．那么由 $\tilde{\partial}_1$ 的定义，知 $\partial_1 z^1 \in C_0(a)$．设 $\partial_1 z^1 = ka$．下面证明 $k = 0$．

将 ε 作用于

$$\partial_1 z^1 = ka$$

的两端．右端 $\varepsilon(ka) = k$，而由 (2.3)，左端 $\varepsilon(\partial_1 z^1) = 0$．于是 $k = 0$．这样 $\text{Ker } \tilde{\partial}_1 \subset \text{Ker } \partial_1$．至于反方向的包含关系是显然的．因此命题得证． ◁

10.5 推论 设 a 为连通复形 K_1 的顶点，那么

$$H_k(K_1, a) = H_k(K_1), \quad k \geq 1,$$

$$H_0(K_1, a) = 0.$$

证明 按定义，$H_k(K_1, a) = H_k(K_1)$，当 $k > 1$．而

$$H_1(K_1, a) = \text{Ker } \tilde{\partial}_1 / \text{Im } \tilde{\partial}_2.$$

由 (10.4)，$\text{Ker } \tilde{\partial}_1 = \text{Ker } \partial_1$，于是

$$H_1(K_1, a) = \text{Ker}\partial_1 / \text{Im}\partial_2 = H_1(K_1).$$

又

$$H_0(K_1,a)=C_0(K_1,a)/\mathrm{Im}\tilde{\partial}_1.$$

由 (10.4), $\tilde{\partial}_1$ 为满同态，于是

$$H_0(K_1,a)=0. \qquad \lhd$$

10.6　推论　设 a 为复形 K 的顶点，那么

$$H_k(K,a)=\tilde{H}_k(K),\quad k\geq 0.$$

证明　由 (10.3) 不妨设 K 连通. 这时，结论由 (10.5) 及 (6.21) 即知. 也可直接证明. $\lhd$

下面是相对同调群的一些计算实例.

10.7　例 设 K 为 n 维实心球 E^n, L 为它的边界 S^{n-1}.

这时不妨设 $K=A^n, L=\dot{A}^n$.

于是除掉 $C_n(K)=\mathbb{Z}$ 外，$C_k(K)=C_k(L), k<n$. 因此

$$C_k(K,L)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & k=n,\\ 0, & k<n.\end{cases}$$

这样

$$H_k(K,L)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & k=n,\\ 0, & k<n.\end{cases}$$

¡　$H_n(K,L)=\mathbb{Z}$ 的生成元是 $[\sigma]$, 这里 $\sigma=+A^n$, 即 σ 为 K 相对于 L 的一个闭链，而其它的相对闭链都是它的倍数.

10.8　例　设 K 为柱面，L 为底边.

这时用 (2.5) 的做法，可知 $H_2(K,L)=0, H_1(K,L)=0$.

实际上，$(a_1a_5a_4)$ 不可能在 K 相对于 L 的闭链中出现，因为它的边缘 (a_5a_4) 不在其它的 2 维有向单形中出现. 仿此，可知其它的 2 维有向单形也不可能在 K 相对于 L 的闭链中出现. 所以 $\mathrm{Ker}\ \tilde{\partial}_2=0$. 这样 $H_2(K,L)=0$.

至于 $H_1(K,L)=0$, 可证明如下.

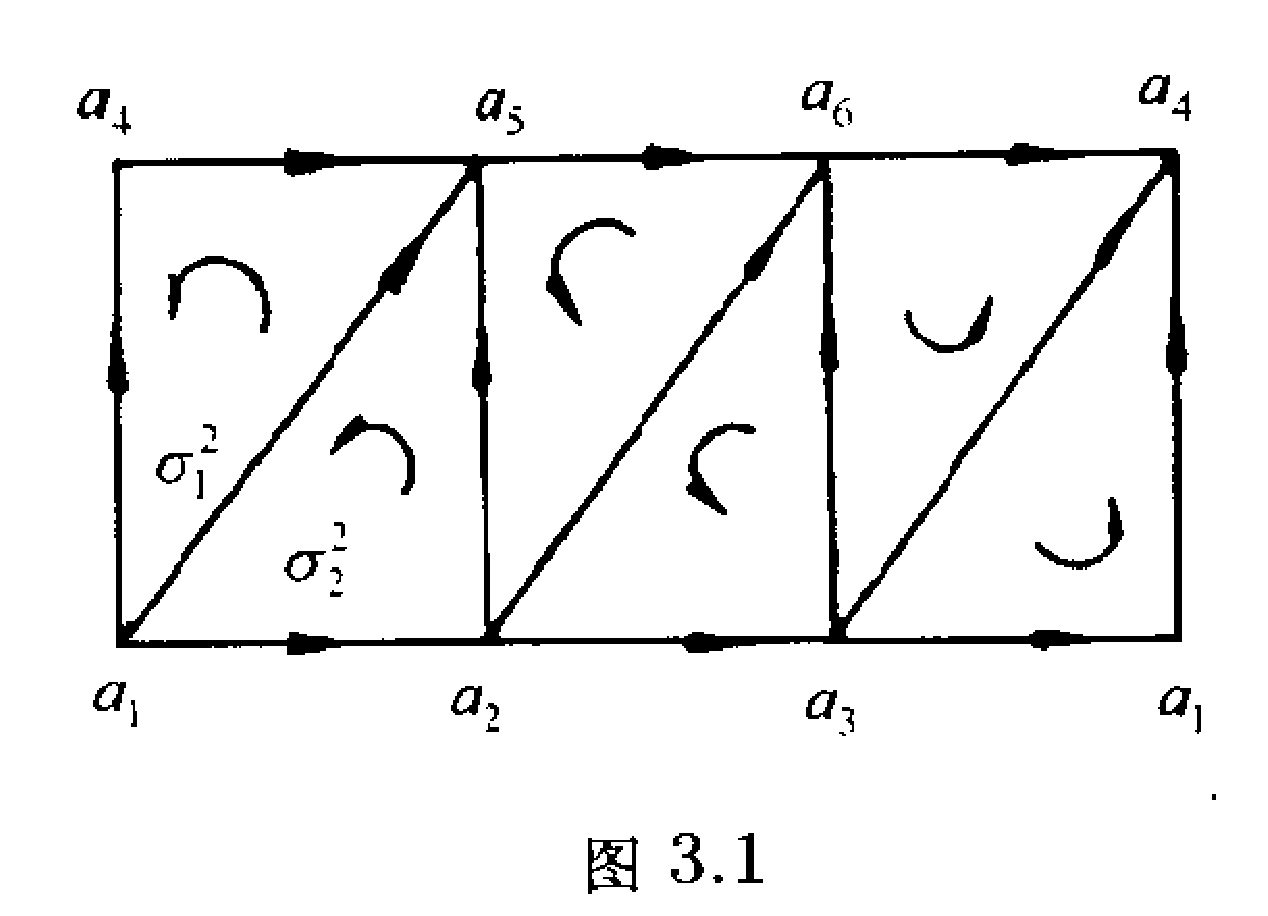


图 3.1

由 (2.5), 知 K 的每个 1 维链, 在加上某个 2 维链的边缘后, 总可变为以下的链

$$\alpha_1(a_1a_2)+\alpha_2(a_2a_3)+\alpha_3(a_3a_1)+\alpha_4(a_1a_4)+\alpha_5(a_2a_5)+\alpha_6(a_3a_6).$$

这个链如果属于 Ker $\tilde{\partial}_1$, 那么 a_4,a_5,a_6 的系数 $\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 都应为 0. 但这么一来, 这个链变成子复形 L 的链, 因此 Ker $\tilde{\partial}_1=0$. 这样 $H_1(K,L)=0$.

最后, $H_0(K,L)=0$ 是容易的. 请读者补出.

10.9 例 设 K 为柱面, L 为上、下边.

这时有 K 相对于 L 的 2 维闭链存在. 实际上, 在适当定向后, 全部 2 维有向单形的和就是. 至于其他的 2 维闭链都是它的倍数, 因此, $H_2(K,L)=\mathbb{Z}$.

$H_1(K,L)=\mathbb{Z}$, 可证明如下 (参见 (10.8) 的图).

显然, 每条 "垂直" 和 "对角" 棱都是 K 相对于 L 的 1 维闭链, 而且它们只差 Im $\tilde{\partial}_2$ 中的一个元. 所以任取一个, 它的类就是 $H_1(K,L)$ 的母元.

最后, 由于 $C_0(K,L)=0$, 所以 $H_0(K,L)=0$.

¡ 由于 $C_0(K,L)=0$, 所以不存在 $C_0(K,L)\to\mathbb{Z}$ 的满同态, 因此在相对的情形, 没有增广同态这一概念.

10.10 例 K 是 Möbius 带, L 是它的 "边".

这时 K 如图 3.2 所示, L 由单形 $(a_1a_2),(a_2a_3),(a_3a_4),(a_4a_5),(a_5a_6),(a_6a_1)$ 和顶点 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 组成.

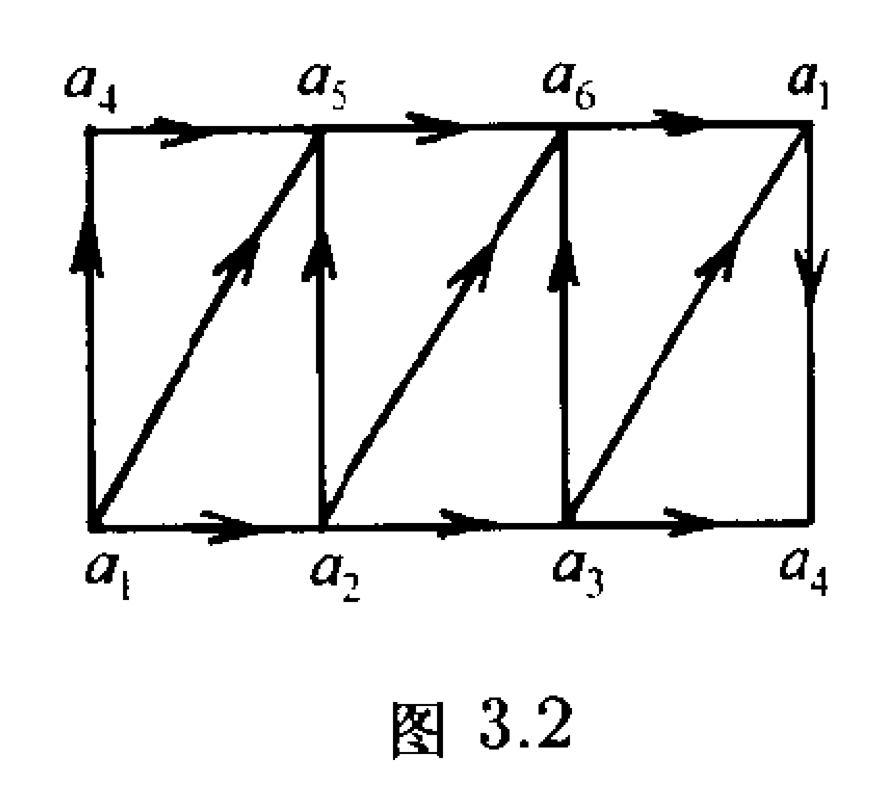


图 3.2

先来计算 $H_2(K,L)$.

这时，很容易证明，不存在非 0 的 K 相对于 L 的 2 维闭链，所以 $H_2(K,L)=0$.

再来看 $H_1(K,L)$.

由 (2.6), 知 K 的每个 1 维链, 在加上某个 2 维链的边缘后, 总可变为如下的链

$$\alpha_1(a_1a_4)+\alpha_2(a_1a_2)+\alpha_3(a_2a_3)+\alpha_4(a_3a_4)+\alpha_5(a_4a_5)$$
$$+\alpha_6(a_5a_6)+\alpha_7(a_6a_1).$$

所以 K 相对于 L 的 1 维链便呈 $\alpha_1(a_1a_4)$ 的形状. 它当然属于 $\mathrm{Ker}\ \tilde{\partial}_1$. 不过

$$\partial_2\left(\sum_{i=1}^{6}\sigma_i^2\right)=(a_1a_2)+(a_2a_3)+(a_3a_4)-(a_4a_5)$$
$$-(a_5a_6)-(a_6a_1)-2(a_1a_4).$$

因此， $2(a_1a_4)\in \mathrm{Im}\tilde{\partial}_2$. 这样

$$H_1(K,L)=\mathbb{Z}/2.$$

$H_0(K,L)=0$ 请读者补出.

10.11　例　取 K 为 Möbius 带和 E^2 的一点并， L 是 K 的 1 维骨架.

不难看出，这时 $H_2(K,L)=\mathbb{Z}$，它由 $\sigma=+A^2$(参见例 10.7) 生成. 又 $H_1(K,L)=\mathbb{Z}/2$，它由 (a_1a_4) 生成 (参见例 10.10).

¡ 从上面的例子和定义可以知道，相对同调群 $H_k(K,L)$ 不仅和 $K\backslash L$ 中的单形有关，而且还和这些单形的边界在 $K\backslash L$ 中的部分如何有关. 注意到这一点，就不难有

10.12 定理 设复形 K 是它的子复形 K_1 和 K_2 的并: $K=K_1\cup K_2$，那么对所有的 k，置入映射 $i:K_2\to K$ 导出的同态

$$H_k(K_2,K_1\cap K_2)\to H_k(K,K_1)$$

均为同构.

证明 首先利用 i，定义

$$h_k:C_k(K_2,K_1\cap K_2)\to C_k(K,K_1).$$

实际上，i 导出

$$C_k(K_2)\xrightarrow{i_k}C_k(K).$$

命 $j_k:C_k(K)\to C_k(K,K_1)$ 为商同态. 又 $l_k=j_k\cdot i_k$，那么由于

$$\mathrm{Ker}\ l_k=C_k(K_1\cap K_2),$$

因此 l_k 导出 (单) 同态 h_k 如上. 但 $C_k(K,K_1)$ 由 $K\backslash K_1$ 中的 k 维单形定向以后生成. 而这些单形，由于 $K=K_1\cup K_2$ 的关系，当然都是 K_2 的单形. 因此 h_k 为满同态. 于是上述 h_k 实际上为同构.

显然，h_k 还保持边界关系不变. 因此它过渡到相对同调群以后，仍为同构. ◁

¡ 命 $O=|K|\backslash|K_2|\subseteq|K_1|$，那么由于 $|K_2|$ 是 $|K|$ 的闭子集，所以 O 为开集. 注意 $|K_2|=|K|\backslash(|K|\backslash|K_2|)=|K|\backslash O$，$|K_1\cap K_2|=|K_1|\backslash(|K|\backslash|K_2|)=|K_1|\backslash O$，所以 $(K_2,K_1\cap K_2)$ 可以看做是在 (K,K_1) 里“切除”K_1 里的一个开集 O. 因此 (10.12) 也称为“切除定理”.

现在，对于给定的复形 K 和它的子复形 L，我们有三种同调群

$$H_k(K),\quad H_k(L),\quad H_k(K,L).$$

它们之间有何关系呢？

首先，$C_k(L)$ 是 $C_k(K)$ 的一个直和项，而它们的商群就是 $C_k(K,L)$. 于是有短正合列

$$0\to C_k(L)\xrightarrow{i_k}C_k(K)\xrightarrow{j_k}C_k(K,L)\to 0,$$

其中 i_k 为置入同态，j_k 为商同态.

不难证明置入映射决定的 $\{i_k:C_k(L)\to C_k(K)\}$ 为映复形 L 的链群到复形 K 的链群的链映射，因此导出同调群间的同态

$$i_{k*}:H_k(L)\to H_k(K).$$

由 (1) 知，商同态 $j_k:C_k(K)\to C_k(K,L)$ 适合条件

$$\tilde{\partial}_k j_k=j_{k-1}\partial_k{}^{1)}.$$

10.13　推论　同态 $\{j_k:C_k(K)\to C_k(K,L)\}$ 导出同调群间的同态

$$j_{k_*}:H_k(K)\to H_k(K,L).$$

证明　这由 $j_k:C_k(K)\to C_k(K,L)$ 适合条件

$$j_k|Z_k(K):Z_k(K)\to \mathrm{Ker}\tilde{\partial}_k,$$

$$j_k|B_k(K):B_k(K)\to \mathrm{Im}\tilde{\partial}_{k+1},$$

而知.　◁

1) 不难将链映射，链同伦等的定义推广到涉及相对链的情形，于是此等式表示 $\{j_k\}$ 为链映射.

¡ 同态 $i_k: C_k(L) \to C_k(K)$ 虽然是单的,但 $i_{k*}: H_k(L) \to H_k(K)$ 不一定是单同态;同样, $j_k: C_k(K) \to C_k(K,L)$ 虽为满同态,但 $j_{k*}: H_k(K) \to H_k(K,L)$ 不一定再满. 看下面的例子.

先看例 (10.7). 这时因为 $H_1(E^2)=0$, 因此

$$i_{1*}: H_1(S^1) \to H_1(E^2) = 0$$

不是单同态,但却满.

¡ 由于 $i_{1*}=0$, 因此对 $H_1(S^1)$ 的母元 $[\sigma]$, 在将 σ 视为 E^2 的 1 维闭链后,它实际上是边缘链,设 $\partial c = \sigma$. 于是 c 是 E^2 相对于 S^1 的 2 维闭链. 因此它决定 $H_2(E^2, S^1)$ 中的一个元 $[c]$. 这个过程可以推广到一般情形:对 $\mathrm{Ker}(i_{k*}: H_k(L) \to H_k(K))$ 中的元,可以得到 $H_{k+1}(K,L)$ 中的一个元. (见 151 页的“上台阶”部分).

再看例 (10.8). 这时 K 是柱面, L 是底边. 于是

$$i_{1*}: H_1(L) \to H_1(K)$$

为同构,即:既是单同态又是满同态.

实际上, $H_1(L)$ 的母元是由 $(a_1a_2)+(a_2a_3)+(a_3a_1)$ 所决定的类. 而 $H_1(K)$ 的母元,也可取为由这个元所决定的类 (参见 (2.5)). 而 i_{1*} 是由置入映射导出,故它将 $H_1(L)$ 的生成元变为 $H_1(K)$ 的生成元.

在例 (10.9) 中, K 仍为柱面,不过 L 是上、下边. 这时

$$i_{1*}: H_1(L) \to H_1(K)$$

不是单同态,但是满同态. 这只要由 $H_1(L)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, 它们分别由“上边”$(a_4a_5)+(a_5a_6)+(a_6a_4)$ 和“下边”$(a_1a_2)+(a_2a_3)+(a_3a_1)$ 的类生成,以及 $H_1(K)=\mathbb{Z}$ 由“上 (下) 边”的类生成而知. 这时 $\mathrm{Ker}\, i_{1*}=\mathbb{Z}$ 的母元可取为 $[(a_1a_2)+(a_2a_3)+(a_3a_1)]-[(a_4a_5)+(a_5a_6)+(a_6a_4)]$.

例 (10.10) 里的

$$i_{1*}: H_1(L) \to H_1(K)$$

是单同态, 但不满. 这时 K 是 Möbius 带, 而 L 是它的 "边".

很容易知道, $H_1(L) = \mathbb{Z}$ 是由 $(a_1a_2) + (a_2a_3) + (a_3a_4) + (a_4a_5) + (a_5a_6) + (a_6a_1)$ 所在的类生成. 而 $H_1(K) = \mathbb{Z}$ 是由 $(a_1a_2) + (a_2a_3) + (a_3a_4) - (a_1a_4)$ 所在的类生成. 这个类的另一个代表为 $(a_1a_4) + (a_4a_5) + (a_5a_6) + (a_6a_1)$. 按定义

$$\begin{aligned}
&i_{1*}([(a_1a_2) + (a_2a_3) + (a_3a_4) + (a_4a_5) + (a_5a_6) + (a_6a_1)]) \\
&= [(a_1a_2) + (a_2a_3) + (a_3a_4) - (a_1a_4) + (a_1a_4) + (a_4a_5) \\
&\quad + (a_5a_6) + (a_6a_1)] \\
&= [(a_1a_2) + (a_2a_3) + (a_3a_4) - (a_1a_4)] + [(a_1a_4) + (a_4a_5) \\
&\quad + (a_5a_6) + (a_6a_1)] \\
&= 2[(a_1a_2) + (a_2a_3) + (a_3a_4) - (a_1a_4)].
\end{aligned}$$

即 $i_{1*}(= \times 2)$ 是将每个元变成它的两倍.

最后来看例 (10.11). 这时 K 是 Möbius 带和 E^2 的一点并, L 是 K 的 1 维骨架.

为了证明

$$i_{1*}: H_1(L) \to H_1(K)$$

既不满也不是单同态, 我们指出 $H_1(L) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, 它的生成元分别为 $[(a_1a_2) + (a_2a_3) + (a_3a_4) + (a_4a_5) + (a_5a_6) + (a_6a_1)]$ 和 $[\sigma]$. $H_1(K) = \mathbb{Z}$ 的生成元为 $[(a_1a_2) + (a_2a_3) + (a_3a_4) - (a_1a_4)]$. 于是 $i_{1*}([\sigma]) = 0$ 表明 i_{1*} 不是单同态, i_{1*} 在另一生成元上是 $\times 2$ (参见前一段的讨论), 所以不满.

由上面的讨论知道, 单同态 $i_k: C_k(L) \to C_k(K)$ 在同调群上导出的同态 $i_{k*}: H_k(L) \to H_k(K)$ 不再是单. 实际上, 它各种情况 (单, 满; 不单, 满; 单, 不满; 不单, 不满) 都可能出现. 因此, 似乎没有什么结论可以得到. 同样, 对于满同态 $j_k: C_k(K) \to C_k(K, L)$ 而言, 它在同调群上导出的同态 $j_{k*}: H_k(K) \to H_k(K, L)$ 也是这样. (10.3) 中的 $j_{k*}: H_k(K) \to H_k(K, a)(k > 1)$ 既单又满; (10.7) 的 j_{2*} 单, 不满; (10.8) 的 j_{1*} 满, 不单; (10.9) 中的 j_{1*} 不满, 不单.

但是如果我们将 i_{k*} 和 j_{k*} 放在一起考虑, 也就是说, 我们考虑序列

$$H_k(L) \xrightarrow{i_{k*}} H_k(K) \xrightarrow{j_{k*}} H_k(K, L),$$

那么从以上的诸例中, 一眼就可以看出

$$\mathrm{Im} i_{k*} \subset \mathrm{Ker} j_{k*}. \tag{2}$$

实际上, $H_k(L)$ 的同调类 $[x]$, 其代表 x 为 L 的一个闭链, 经 i_{k*} 作用后, $i_{k*}[x]$ 仍由 x 代表, 只不过这时将 x 视为 K 的链而已. $i_{k*}[x]$ 再经 j_{k*} 作用, 得到的 $j_{k*}(i_{k*}[x])$, 按定义, 也还是由 x 代表. 但由于 x 是 L 的链, 因此 $\overset{*}{x}= 0$. 从而 (2) 成立.

现在我们证明, (2) 中的反方向包含关系也成立:

$$\mathrm{Im}\ i_{k_*} \supset \mathrm{Ker}\ j_{k*}.$$

设 $[z] \in \mathrm{Ker}\ j_{k*}$, 即 $[z] \in H_k(K)$ 使 $j_{k*}([z]) = 0$. 按定义, $j_{k*}([z]) = [\overset{*}{z}]$, 因此 $[\overset{*}{z}] = 0$ 表示 $\overset{*}{z}\in B_k(K, L)$, 即有 $x \in C_k(L)$ 及 $c \in C_{k+1}(K)$ 使 $\partial c = z - x$. 由此可知 $\partial x = \partial z - \partial(\partial c) = 0$. 即 x 为 L 的闭链. 于是 x 决定 L 的一个 k 维同调类. 显然, $i_{k*}([x]) = [z]$. (这只要注意 $\partial c = z - x$ 即可.)

总结起来, 我们证明了:

10.14 命题 对于复形偶 (K, L) 来说, 序列

$$H_k(L) \xrightarrow{i_{k*}} H_k(K) \xrightarrow{j_{k*}} H_k(K, L)$$

在 $H_k(K)$ 处正合. ◁

那么对于 Ker i_{k*} 和 Im j_{k*} 有些什么可说呢?

在前面 (见 148 页的 ¡) 讨论 i_{1*} 不是单同态时, 已经指出, 对于 $\mathrm{Ker}(i_{k*}: H_k(L) \to H_k(K))$ 中的元, 可以得到相对同调群 $H_{k+1}(K, L)$ 中的一个元. 现在我们将这一过程写出来.

这一过程可以形象地称为 "上台阶"(参见下图).

$$\begin{array}{ccccc} & & C_{k+1}(K) & \xrightarrow{j_{k+1}} & C_{k+1}(K,L) \\ & & \partial_{k+1} \downarrow & & \\ C_k(L) & \xrightarrow{i_k} & C_k(K) & & \end{array}$$

给定 L 的一个属于 Ker i_{k*} 的类 $[x]$, 其代表元素 x 经 i_k 作用后是 $H_k(K)$ 的零元素的代表, 即它是 K 的边缘链. 设 $c \in C_{k+1}(K)$ 使 $\partial c = x$. 由 $c \in C_{k+1}(K)$, 有 $\overset{*}{c} \in C_{k+1}(K, L)$. 但 $\partial c = x$ 为 L 的链, 所以 $\tilde{\partial}_{k+1}(\overset{*}{c}) = (\partial c)^* = \overset{*}{x} = 0$, 即 $\overset{*}{c}$ 为相对闭链. 这样就得到 $[\overset{*}{c}] \in H_{k+1}(K, L)$.

¡ 上述由 $[x]$ 得到 $[\overset{*}{c}]$ 的过程, 由于有一些不确定的因素, 因此 $[\overset{*}{c}]$ 不能由 $[x]$ 唯一决定.

上述 "上台阶" 的作法, 也可以倒过来做, 即我们可以从相对同调群 $H_{k+1}(K, L)$ 的元 $[\overset{*}{z}]$ 得到 $[x] \in H_k(L)$. 这个过程可以形象地称为 "下台阶"(参见上图).

给定 $H_{k+1}(K, L)$ 的元 $[\overset{*}{z}]$, 取它的一个代表 $\overset{*}{z}$, 于是 $\tilde{\partial}(\overset{*}{z}) = 0$. 设 z 为 $\overset{*}{z}$ 的一个代表. 那么由 $(\partial_{k+1}(z))^* = \tilde{\partial}(\overset{*}{z}) = 0$, 即 $j_k\partial_{k+1}(z) = 0$. 于是 $\partial_{k+1}(z) \in \mathrm{Ker}\ j_k = \mathrm{Im}\ i_k$. 设 $x \in C_k(L)$ 使 $i_k(x) = \partial_{k+1}(z)$. 那么由 i_{k-1} 为单及 $i_{k-1}\partial_k^L(x) = \partial_k i_k(x) = \partial_k\partial_{k+1}(z) = 0$, 知 $\partial_k^L(x) = 0$. 所以得到 $H_k(L)$ 的一个元 $[x]$, 记为 $\triangle_{k+1}([\overset{*}{z}])$.

在从 $[\overset{*}{z}]$ 得到 $\triangle_{k+1}([\overset{*}{z}])$ 的过程中, 虽说 z 具有一定的任意性, 但它不影响最后的结果. 例如, 若 z' 为 $\overset{*}{z}$ 的另一代表. 那么 $z - z' \in \mathrm{Ker}\ j_{k+1} = \mathrm{Im}\ i_{k+1}$. 于是有 $c \in C_{k+1}(L)$ 使

$z' = z + i_{k+1}(c)$. 这样 $x + \partial_{k+1}^L(c)$ 适合 $i_k(x + \partial_{k+1}^L(c)) = i_k x + i_k \partial_{k+1}^L(c) = \partial_{k+1}(z) + \partial_{k+1} i_{k+1}(c) = \partial_{k+1}(z + i_{k+1}(c)) = \partial_{k+1}(z')$. 于是 $\triangle_{k+1}([\overset{*}{z}]) = [x + \partial_{k+1}^L(c)] = [x]$. 同样可证上述过程与 $[\overset{*}{z}]$ 的代表 $\overset{*}{z}$ 的取法无关. 这样我们就有

$$\triangle_{k+1} : H_{k+1}(K, L) \to H_k(L),$$

而且不难验证它是一个同态. 以后称这个同态为 (K, L) **的边缘同态**.

"下台阶"作法与"上台阶"作法有以下两点不同:

(1) "上台阶"作法, 只对 Ker i_* 中的元有效, 而"下台阶"作法, 对 $H_{k+1}(K, L)$ 的元均可实施, 实际上, 它只依赖于短正合序列

$$0 \to C_*(L) \to C_*(K) \to C_*(K, L) \to 0.$$

(2) "下台阶"得到的元唯一; 而"上台阶"不唯一.

有了同态 $\triangle_{k+1}$, 我们就可以描述 Ker i_{k*} 和 Im j_{k+1} 了. 实际上, 我们有

10.15　定理　对于复形偶 (K, L), 序列

$$\begin{aligned}\cdots \to H_{k+1}(K, L) &\xrightarrow{\triangle_{k+1}} H_k(L) \xrightarrow{i_{k*}} H_k(K) \\ &\xrightarrow{j_{k*}} H_k(K, L) \to \cdots\end{aligned} \tag{3}$$

是正合的. 这个正合列叫做 **复形偶 (K, L) 的正合同调序列**.

证明　我们逐个地证明在每个群处的正合性. 这时图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C_{k+1}(L) & \xrightarrow{i_{k+1}} & C_{k+1}(K) & \xrightarrow{j_{k+1}} & C_{k+1}(K, L) & \to & 0 \\ & & \partial_{k+1}^L \downarrow & & \partial_{k+1}^K \downarrow & & \downarrow \tilde{\partial}_{k+1} & & \\ 0 & \to & C_k(L) & \xrightarrow{i_k} & C_k(K) & \xrightarrow{j_k} & C_k(K, L) & \to & 0 \end{array}$$

将起到醒目的作用.

(i) 在 $H_k(K)$ 处的正合性. 就是 (10.14).

(ii) 现证在 $H_k(L)$ 处的正合性. 也就是证明 $\mathrm{Im}\triangle_{k+1} = \mathrm{Ker}\, i_{k*}$.

先证 $\mathrm{Im}\triangle_{k+1} \subset \mathrm{Ker} i_{k*}$.

设 $[\overset{*}{x}{}^{k+1}] \in H_{k+1}(K, L)$ 在 $\triangle_{k+1}$ 下的像为 $[y^k]$. 那么按定义, $y^k \in Z_k(L)$ 适合条件 $i_k y^k = \partial x^{k+1}$. 于是 $i_{k*}[y^k] = [i_k y^k] = [\partial x^{k+1}] = 0 \in H_k(K)$.

至于 $\mathrm{Ker}\ i_{k*} \subset \mathrm{Im}\triangle_{k+1}$, 证明如下.

设 $[y^k] \in \mathrm{Ker}\ i_{k*}$, 即 $[y^k] \in H_k(L)$ 使 $i_{k*}[y^k] = [i_k y^k] = 0 \in H_k(K)$. 于是有 $x^{k+1} \in C_{k+1}(K)$ 使 $\partial x^{k+1} = i_k y^k$. 考虑 $j_{k+1}(x^{k+1}) = \overset{*}{x}{}^{k+1}$. 我们说 $\tilde{\partial}_{k+1}(\overset{*}{x}{}^{k+1}) = 0$. 实际上, $\tilde{\partial}_{k+1}(\overset{*}{x}{}^{k+1}) = (\partial_{k+1}x^{k+1})^* = (i_k y_k)^* = j_k(i_k y_k) = 0 \in C_k(K, L)$. 因此它是相对闭链, 故决定 $H_{k+1}(K, L)$ 的一个元 $[\overset{*}{x}{}^{k+1}]$. 但由 $i_k y^k = \partial x^{k+1}$, 知 $\triangle_{k+1}[\overset{*}{x}{}^{k+1}] = [y^k]$. 所以 $\mathrm{Ker} i_{k*} \subset \mathrm{Im}\,\triangle_{k+1}$.

¡ 这里证明的, 实际上是先"上台阶", 再"下台阶"就回到原出发点这一事实.

(iii) 最后证明在 $H_{k+1}(K, L)$ 处的正合性.

为了证明包含关系 $\mathrm{Im} j_{k+1*} \subset \mathrm{Ker}\triangle_{k+1}$ 成立, 只要证明, 对 $[x^{k+1}] \in H_{k+1}(K)$, 有 $\triangle_{k+1} j_{k+1*}[x^{k+1}] = 0$. 由于 $j_{k+1*}[x^{k+1}] = [\overset{*}{x}{}^{k+1}]$, 所以只要证 $\triangle_{k+1}[\overset{*}{x}{}^{k+1}] = 0$. 可现在 x^{k+1} 是 K 的闭链, 即 $\partial x^{k+1} = 0$. 因此按 $\triangle_{k+1}$ 的定义 $\triangle_{k+1}[\overset{*}{x}{}^{k+1}] = 0$.

还要证明的是 $\mathrm{Ker}\triangle_{k+1} \subset \mathrm{Im} j_{k+1*}$.

设 $[\overset{*}{x}{}^{k+1}] \in \mathrm{Ker}\ \triangle_{k+1}$. 于是有 $y^k \in C_k(L)$ 使 $i_k y^k = \partial^K x^{k+1}$, 而 $y^k = \partial^L y^{k+1}$, 这里 $y^{k+1} \in C_{k+1}(L)$. 现在考虑 $C_{k+1}(K)$ 中的元 $x^{k+1} - i_{k+1}y^{k+1}$. 注意 $\partial^K(x^{k+1} - i_{k+1}y^{k+1}) = \partial^K x^{k+1} - \partial^K i_{k+1} y^{k+1} = i_k y^k - i_k \partial^L y^{k+1} = i_k y^k - i_k y^k = 0$. 即 $x^{k+1} - i_{k+1}y^{k+1}$ 是 K 的闭链, 故决定 $H_{k+1}(K)$ 的一个元 $[x^{k+1} - i_{k+1}y^{k+1}]$. 而 $j_{k+1*}[x^{k+1} - i_{k+1}y^{k+1}] = [(x^{k+1} - i_{k+1}y^{k+1})^*] = [\overset{*}{x}{}^{k+1}]$. 因此所要的 $\mathrm{Ker}\triangle_{k+1} \subset \mathrm{Im} j_{k+1*}$ 成立.

至此, 序列 (3) 的正合性全部证完. ◁

¡ 序列 (3) 在复形 K 和它的子复形 L 以及 (K, L) 的同调

群间建立起了联系. 这个联系表现在 (3) 的正合性上. 可是, 在代数拓扑学发展的早期, 在没有引进正合性这个概念以前. 表达这种联系的方式和证明, 都是极其晦涩和难懂的. 可是有了正合性这个概念以后, 一切便豁然开朗. 定理的叙述和证明, 都变得那么清晰和自然, 这说明, 形式虽然由内容决定, 可好的形式能准确、恰当地反映内容. 使内容的实质表露无遗.

在序列 (3) 中, 将 K 和 L 的同调群换为约化同调群, 正合性不变. 即我们有

10.16　定理　对于复形偶 (K,L), 序列

$$\cdots \to H_{k+1}(K,L) \to \tilde{H}_k(L) \to \tilde{H}_k(K) \to H_k(K,L) \to \cdots \to$$
$$\to H_1(K,L) \to \tilde{H}_0(L) \to \tilde{H}_0(K) \to H_0(K,L) \to 0 \tag{4}$$

是正合的. 这个正合列叫做 (K,L) 的 **正合约化同调序列**.

证明　由于 $k \geq 1$ 时, 同调群和约化同调群相同, 所以要证明的只是序列

$$H_1(K) \to H_1(K,L) \to \tilde{H}_0(L) \to \tilde{H}_0(K) \to H_0(K,L) \to 0$$

的正合性. 但这可以从下面行正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & C_1(L) & \to & C_1(K) & \to & C_1(K,L) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \partial_1^L & & \downarrow \partial_1^K & & \downarrow \tilde{\partial}_1 & & \\
0 & \to & C_0(L) & \to & C_0(K) & \to & C_0(K,L) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \varepsilon^L & & \downarrow \varepsilon^K & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbb{Z} & = & \mathbb{Z} & \to & 0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & = & 0 & = & 0 & = & 0 & = & 0
\end{array}$$

以及 (9.15) 的证明方法而得. ◁

下面我们利用正合同调序列, 研究一下 a 为复形 K 的一个顶点时, $H_k(K), H_k(a)$ 和 $H_k(K,a)$ 的关系.

先写出 (K,a) 的正合同调序列

$$\cdots \to H_{k+1}(K,a) \xrightarrow{\triangle} H_k(a) \xrightarrow{i_*} H_k(K) \xrightarrow{j_*} H_k(K,a) \to \cdots.$$

我们有 (常值) 映射 $c: K \to a$. 它适合条件 $c \circ i = 1: a \to a$. 于是 $c_* i_* = 1$:

$$H_k(a) \underset{c_*}{\overset{i_*}{\rightleftarrows}} H_k(K).$$

下面的引理, 从代数的角度研究了上述情况.

10.17 引理 在长正合序列

$$\cdots \to A_{k+1} \xrightarrow{\alpha_{k+1}} B_k \underset{\delta_k}{\overset{\beta_k}{\rightleftarrows}} C_k \xrightarrow{\gamma_k} A_k \xrightarrow{\alpha_k} \cdots$$

中, 如果有同态 $\delta_k: C_k \to B_k$ 使 $\delta_k \beta_k = 1: B_k \to B_k$, 对所有的 k 成立. 那么 β_k 为单, δ_k 为满, 又

$$C_k = \mathrm{Im}\beta_k \oplus \mathrm{Ker}\delta_k \cong B_k \oplus \mathrm{Coker}\beta_k \cong B_k \oplus \mathrm{Im}\gamma_k \cong B_k \oplus A_k.$$

证明 由 $\delta_k \beta_k = 1: B_k \to B_k$ 立知 β_k 为单和 δ_k 为满. 因此 $\mathrm{Im}\beta_k \cong B_k$.

下面证明

$$C_k = \mathrm{Im}\beta_k \oplus \mathrm{Ker}\delta_k. \tag{5}$$

为此, 任取 $c \in C_k$. 考虑等式

$$c = c - \beta_k \delta_k c + \beta_k \delta_k c = (c - \beta_k \delta_k c) + \beta_k \delta_k c.$$

我们说, $(c - \beta_k \delta_k c) \in \mathrm{Ker}\ \delta_k$. 实际上

$$\delta_k(c - \beta_k \delta_k c) = \delta_k c - \delta_k \beta_k \delta_k c = \delta_k c - \delta_k c = 0.$$

于是 C_k 的元均可表为

$$c = b + d, \quad b \in \mathrm{Im}\beta_k, \quad d \in \mathrm{Ker}\delta_k.$$

再来证明, $\mathrm{Im}\beta_k \cap \mathrm{Ker}\delta_k = 0$.

为此设 $e \in (\mathrm{Im}\beta_k \cap \mathrm{Ker}\delta_k)$.

由 $e \in \mathrm{Im}\beta_k$, 知有 b^1 使 $\beta_k(b^1) = e$. 再由 $e \in \mathrm{Ker}\delta_k$, 知 $\delta_k(e) = 0$. 于是 $0 = \delta_k(e) = \delta_k(\beta_k(b^1)) = (\delta_k\beta_k)(b^1) = b^1$. 这样 $e = \beta_k(b^1) = \beta_k(0) = 0$. 故 (5) 得证.

由 (5), 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\delta_k &= C_k/\mathrm{Im}\beta_k \\ &= \mathrm{Coker}\beta_k = C_k/\mathrm{Ker}\gamma_k = \mathrm{Im}\gamma_k = \mathrm{Ker}\alpha_k.\end{aligned}$$

另一方面, 由 β_{k-1} 为单, 即 $\mathrm{Ker}\ \beta_{k-1} = 0$ 及 $\mathrm{Ker}\ \beta_{k-1} = \mathrm{Im}\ \alpha_k$, 知 $\mathrm{Im}\ \alpha_k = 0$. 即 $\mathrm{Ker}\ \alpha_k = A_k$. 这样

$$\mathrm{Ker}\ \delta_k = A_k.$$

引理全部得证. ◁

¡ (5) 的成立, 用不到 (*) 正合, 只要 $\delta_k\beta_k = 1$ 就够了.

10.18 推论 若 a 为复形 K 的顶点, 那么

$$\begin{aligned}H_k(K) &= H_k(a) \oplus H_k(K,a) \\ &= \begin{cases} H_k(K,a), & k > 0, \\ H_k(K,a) \oplus \mathbb{Z}, & k = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}H_k(K,a) &= \mathrm{Ker}(H_k(K) \to H_k(a)) \\ &= \mathrm{Coker}(H_k(a) \to H_k(K)), \quad k \geq 0\end{aligned}$$

成立. ◁

10.19 推论 设 P 为单点空间, 那么

$$\begin{aligned}\tilde{H}_k(K) &= \mathrm{Ker}(H_k(K)\to H_k(P))\\ &= \mathrm{Coker}(H_k(P)\to H_k(K)),\quad k\geq 0.\end{aligned}$$

证明 利用取同调具有函子性, 结合 (10.6) 和 (10.18) 立知. 实际上, 由 (10.6) 和 (10.18) 有

$$\tilde{H}_k(K)=H_k(K,a)=\mathrm{Ker}(H_k(K)\to H_k(a)).$$

考虑可换图

$$\begin{array}{ccc} & & a\\ & c\nearrow & \\ K & & \downarrow h\\ & \pi\searrow & \\ & & P\end{array}$$

其中, c,π 和 h 均为常值映射. 实际上, h 是同胚, 故 h_* 为同构, 因此 $\mathrm{Ker}\pi_*=\mathrm{Ker}(hc)_*=\mathrm{Ker}h_*c_*=\mathrm{Ker}c_*$.

另一等式的证明与此类似. ◁

¡ 至此, 复形 K 的约化同调群有以下几种等价形式:

(1) 由约化链群定义;

(2) 用增广同态来定义;

(3) 它就是 $H_k(K,a)$;

(4) 用 $\mathrm{Ker}(H_k(K)\to H_k(P))$ 定义, 这里 P 为单点空间;

(5) 用 $\mathrm{Coker}\ (H_k(P)\to H_k(K))$ 定义, 这里 P 为单点空间.

引理 (10.17) 还有别的用处.

10.20 定义 空间 X 的子空间 A 称为 X 的 **收缩**, 如果存在 $r:X\to A$ 使 $r\circ i=1:A\to A$. 这时也称 r 为 **收缩映射**. 如果

还有 $i\circ r\simeq 1_X$, 则称 A 为 X 的 **形变收缩**. 显然，当子多面体 $|L|$ 为多面体 $|K|$ 的形变收缩时，它们的同调群一样.

下面讨论收缩的情况.

10.21 定理 若多面体 $|K|$ 的一个子多面体 $|L|$ 为 $|K|$ 的收缩，那么对所有的 $k, H_k(L)$ 为 $H_k(K)$ 的一个直和项.

证明 设 $r:|K|\to|L|$ 为收缩. 那么由于 $r\circ i=1$, 因此对正合同调序列

$$\cdots\to H_{k+1}(K,L)\xrightarrow{\triangle_*}H_k(L)\xrightarrow{i_*}H_k(K)\xrightarrow{\partial_*}H_k(K,L)\to\cdots$$

应用 (10.17), 知

$$H_k(K)=H_k(L)\oplus H_k(K,L).$$

所以 $H_k(L)$ 为 $H_k(K)$ 的一个直和项. ◁

10.22 推论 n 维实心球 E^n 不以它的边界 S^{n-1} 为自己的收缩.

证明 这由 $H_{n-1}(S^{n-1})=\mathbb{Z}$ 不是 $H_{n-1}(E^n)=0$ 的直和项即知. ◁

10.23 定理 (Brouwer 不动点定理) 设 $\varphi:E^n\to E^n$ 为 n 维实心球到自己的一个映射，那么必有 $x\in E^n$, 使

$$\varphi(x)=x.$$

证明 如果对所有的 $x\in E^n$, 均有 $\varphi(x)\neq x$. 那么就可以从 $\varphi(x)$ 往 x 做射线. 设此射线与 E^n 的边界 S^{n-1} 交于 $\psi(x)$(图 3.3). 这样我们就有映射

$$\psi:E^n\to S^{n-1}.$$

(ψ 的连续性请读者自行补出). 显然 ψ 适合条件

$$\psi\circ i=1:S^{n-1}\to S^{n-1},$$

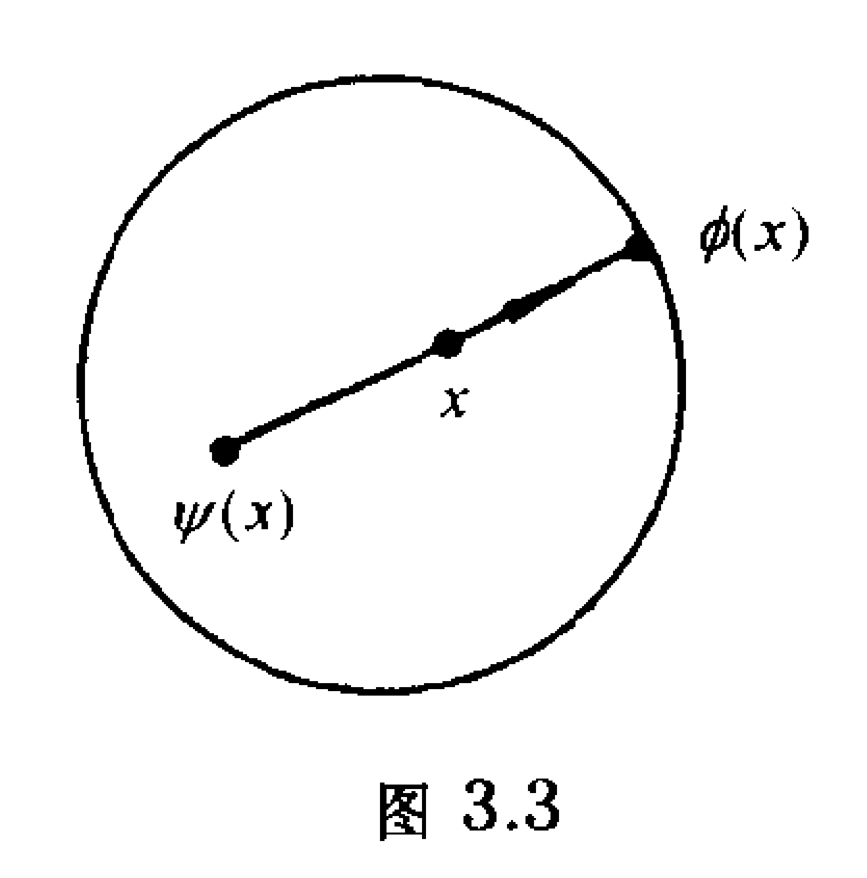


图 3.3

即 $\psi: E^n \to S^{n-1}$ 为收缩映射，与 (10.22) 矛盾！ $\triangleleft$

¡ 这个证明依赖于 (10.22). 反过来，由 (10.23) 也可推导 (10.22). 即我们有

10.24 定理 如果每个映射 $\varphi: E^n \to E^n$ 都有不动点，那么 E^n 不以边界 S^{n-1} 为自己的收缩.

证明 如果 S^{n-1} 为 E^n 的收缩. 即有 $r: E^n \to S^{n-1}$ 使 $r \circ i = 1$. 那么定义

$$\begin{aligned} \varphi: \quad & E^n \to E^n \\ & x \mapsto -r(x). \end{aligned}$$

则 φ 没有不动点. 与假设矛盾！ $\triangleleft$

由于复形偶 (K, L) 的正合同调序列

$$\cdots \to H_k(L) \to H_k(K) \to H_k(K, L) \to H_{k-1}(K) \to \cdots$$

是由短正合序列

$$0 \to C_*(L) \to C_*(K) \to C_*(K, L) \to 0$$

导出的 (参见 151 页的"下台阶"讨论). 因此，给定复形 K 的子复形 L 和 L 的子复形 M(记为 (K, L, M), 称为 **三重**) 以后，我们可以从短正合序列

$$0 \to C_*(L, M) \to C_*(K, M) \to C_*(K, L) \to 0$$

出发，先用“下台阶”的办法 (参见下图)

$$\begin{array}{ccc} & C_{k+1}(K,M) & \to & C_{k+1}(K,L) \\ & \downarrow & & \\ C_k(L,M) \quad \to & C_k(K,M) & & \end{array}$$

得到同态

$$\triangle_{k+1}: H_{k+1}(K,L) \to H_k(L,M).$$

然后就可以证明序列

$$\begin{aligned} \cdots \to H_k(L,M) \to H_k(K,M) \to H_k(K,L) \\ \to H_{k-1}(L,M) \to \cdots \end{aligned} \tag{6}$$

正合.

10.25 定义 序列 (6) 称为 **三重** (K,L,M) **的正合同调序列**.

上面我们把同调群从绝对的情形推广到相对的情形. 利用对偶的手法, 不难将上同调群也推广到相对的情形. 细节请读者补出. 下面介绍复形 K 相对于子复形 L 的相对上链群 $C^k(K,L) = \mathrm{Hom}(C_k(K, L), \mathbb{Z})$ 的一种解释.

从正合列

$$C_k(K) \xrightarrow{j} C_k(K,L) = \frac{C_k(K)}{C_k(L)} \to 0$$

出发, 不难证明, 序列

$$\begin{aligned} 0 \to C^k(K,L) &= \mathrm{Hom}(C_k(K,L),\mathbb{Z}) \xrightarrow{j^*} C^k(K) \\ &= \mathrm{Hom}(C_k(K),\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

也正合. 即 j^* 为置入映射. 因此我们可以将 $C^k(K,L)$ 和它在 $C^k(K)$ 中的象 $\mathrm{Im} j^*$ 恒同. 但是

$$\mathrm{Im}\ j^* = \left\{\varphi|\varphi \text{ 为合成 } C_k(K) \xrightarrow{j} \frac{C_k(K)}{C_k(L)} \to \mathbb{Z}\right\},$$

而 $\varphi \in \mathrm{Im} j^*$ 的充要条件是 $\varphi : C_k(K) \to \mathbb{Z}$ 适合条件 $\varphi|_{C_k(L)} = 0 : C_k(L) \to \mathbb{Z}$. 所以 $C^k(K, L)$ 可以视为 $C^k(K)$ 的子群：它由在 L 的有向单形上取值为 0 的那部分上链组成.

相对同调群所具有的性质，相对上同调群一般也具有. 而且其证明，可用对偶的办法得到. 我们就不详细写出 (包括下节的不变性等).

§11. 相对同调群的不变性

由于复形偶 (K, L) 的正合同调序列在 K, L 和 K 相对于 L 的同调群间建立了联系，因此它的作用是巨大的. 在它的众多应用中，我们现在只指出其中之一，即利用它来证明相对同调群的拓扑不变性和伦型不变性.

为此，我们首先说明，偶的拓扑等价和同伦等价的意义.

11.1　定义　对复形偶 (K, K_0) 和 (L, L_0), 映射 $\varphi : K \to L$ 叫做是映 (K, K_0) 入 (L, L_0) 的映射，记为 $\varphi : (K, K_0) \to (L, L_0)$, 如果 $\varphi|K_0 : K_0 \to L_0$.

同样，对空间偶 (X, A)[1] 和 (Y, B), 映射 $\varphi : X \to Y$ 叫做是映 (X, A) 入 (Y, B) 的映射，记为 $\varphi : (X, A) \to (Y, B)$, 如果 $\varphi|A : A \to B$.

上述映射 φ 的全体记为 $\mathrm{Map}(X, A; Y, B)$.

11.2　定义　复形偶 (K, K_0) 和 (L, L_0) 叫做拓扑等价，如果存在映射 $\varphi : (K, K_0) \to (L, L_0)$ 使 $\varphi : K \to L$ 和 $\varphi|K_0 : K_0 \to L_0$ 都是同胚映射.

同样可以定义空间偶的拓扑等价.

11.3　定义　对空间偶 (X, A) 和 (Y, B), 映射 $\varphi_0 : (X, A) \to (Y, B)$ 和 $\varphi_1 : (X, A) \to (Y, B)$ 叫做是同伦的，记为 $\varphi_0 \simeq \varphi_1$,

---

1) 当 A 为 X 的子空间时，称 (X, A) 为 **空间偶**.

如果存在映射

$$H:(X\times I, A\times I)\to (Y,B)$$

使 $H(x,0)=\varphi_0(x), H(x,1)=\varphi_1(x)$. 称 H 为连接 φ_0 和 φ_1 的相对伦移.

¡ 作为偶间的映射 φ_0 和 φ_1 同伦，那么作为 X(或 A) 上的映射， φ_0 和 φ_1 也同伦.

11.4 定义 空间偶 (X,A) 和 (Y,B) 叫做 **同伦等价**, 如果有映射 $\varphi:(X,A)\to(Y,B)$ 和 $\psi:(Y,B)\to(X,A)$ 使 $\varphi\psi\simeq 1_{(Y,B)}, \psi\varphi\simeq 1_{(X,A)}$, 这时也称 $\varphi(\psi)$ 为同伦等价.

和绝对的情形一样，为了证明不变性，我们第一步要解决的问题是：复形偶间的映射如何导出相对同调群间的同态.

设 $\varphi:(K,K_0)\to(L,L_0)$ 为复形偶间的映射. 若映射 $\varphi: K\to L$ 适合星形条件，那么 $\varphi|K_0:K_0\to L_0$ 如何呢？

11.5 命题 若复形偶间的映射 $\varphi:(K,K_0)\to(L,L_0)$ 使 $\varphi:K\to L$ 具有星形性质，那么 $\varphi|\ K_0:K_0\to L_0$ 也具有星形性质.

证明 设 a_0 为 K_0 的顶点. 注意 $St_{K_0}a_0=St_K a_0\cap|K_0|$, 因此由 $\varphi:K\to L$ 适合星形条件, 知有 L 的顶点 b 使 $\varphi(St_K a_0)\subset St_L(b)$. 我们说，$b$ 实际上也是 L_0 的顶点. 这是因为 $\varphi(a_0)\in L_0$, 故若 B 为 $\varphi(a_0)$ 在 L_0 中的承载单形，那么 B 也是 $\varphi(a_0)$ 在 L 中的承载单形 [1]. 故由 $\varphi(a_0)\in St_L b$, 知 b 为 B 的顶点 (参见 (3.6) 中关于星形的定义), 所以 b 为 L_0 的顶点.

既然 b 为 L_0 的顶点, 故 $St_{L_0}b$ 有意义, 而且 $St_{L_0}b=St_L b\cap$

---

1) 一般，当 $x\in L_0$ 时， x 在 L_0 中的承载单形也是它在 L 中的承载单形.

$|L_0|$. 于是

$$\begin{aligned}\varphi(St_{K_0}a_0) &= \varphi(St_K a_0 \cap |K_0|) = \varphi(St_K a_0) \cap \varphi(|K_0|) \\ &\subset St_L b \cap |L_0| = St_{L_0} b.\end{aligned}$$

即 $\varphi|K_0$ 也适合星形条件. ◁

¡ 由上述证明可以知道，顶点 b 完全由 a_0 决定，而与 a_0 视为 K 或 K_0 的顶点无关.

11.6 推论 若复形偶间的映射 $\varphi:(K,K_0)\to(L,L_0)$ 使 $\varphi:K\to L$ 具有星形性质，那么 φ 有单纯逼近 $f:K\to L$. 这时 $f|K_0:K_0\to L_0$, 而且也是 $\varphi|K_0:K_0\to L_0$ 的单纯逼近.

证明 由 (11.5) 的证明及上述 ¡ 立知. ◁

11.7 推论 若复形偶间的映射 $\varphi:(K,K_0)\to(L,L_0)$ 使 $\varphi:K\to L$ 具有星形性质，那么 φ 通过单纯逼近 $f:K\to L$ 导出相对链复形间的一个链映射 $f_{k_\#}:C_k(K,K_0)\to C_k(L,L_0)$. 不同的单纯逼近所导出的链映射，它们彼此链同伦 [1]; 因此过渡到相对同调群，所得同态唯一.

证明 由 (11.6), 知单纯映射 $f:K\to L$ 导出的链映射 $f_k:C_k(K)\to C_k(L)$ 适合条件 $f_k|C_k(K_0):C_k(K_0)\to C_k(L_0)$, 故它导出

$$f_{k_\#}:C_k(K,K_0)\to C_k(L,L_0).$$

至于后一半，请读者自行补出. ◁

一般讲，复形偶间的映射 $\varphi:(K,K_0)\to(L,L_0)$ 不一定使 $\varphi:K\to L$ 具有星形性质，但经过足够多次的重心重分后， $\varphi:(Sd^mK,Sd^mK_0)\to(L,L_0)$ 会使 $\varphi:Sd^mK\to L$ 具有星形性质. 故由 (11.7), 得到相对同调群间的唯一同态 $f_{k*}:H_k(Sd^mK, Sd^mK_0)\to H_k(L,L_0)$.

---

1) 读者应自行补出，相对情形的链同伦是怎么回事.

和在绝对的情形 ($K_0 = \emptyset$) 一样, 为了从 $\varphi : (K, K_0) \to (L, L_0)$ 过渡到 $\varphi_* : H_k(K, K_0) \to H_k(L, L_0)$, 我们还需要相对化的重心重分同态和标准链映射 (标准同态).

注意重心重分同态 $Sd_k^K : C_k(K) \to C_k(SdK)$ 和 $Sd_k^{K_0} : C_k(K_0) \to C_k(SdK_0)$ 间有关系 $Sd_k^{K_0} = Sd_k^K | C_k(K_0)$. 这时将 $C_k(K_0)$ 视为 $C_k(K)$ 的子群, 因此 Sd^K 导出相对链复形间的链映射

$$Sd_k : C_k(K, K_0) \to C_k(SdK, SdK_0).$$

进而在相对同调群上导出同态

$$Sd_* : H_k(K, K_0) \to H_k(SdK, SdK_0).$$

¡　对于复形偶 (K, K_0), 我们在 (K, K_0) 和 (SdK, SdK_0) 的正合同调序列之间, 得到一组映射如下图所示:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \to & H_k(K_0) & \to & H_k(K) & \to & \\
 & & Sd_k^{K_0} \downarrow & & Sd_k^K \downarrow & & \\
\cdots & \to & H_k(SdK_0) & \to & H_k(SdK) & \to & \\
 & & H_k(K, K_0) & \to & H_{k-1}(K_0) & \to & \cdots \\
 & & Sd_* \downarrow & & Sd_{k-1}^{K_0} \downarrow & & \\
 & & H_k(SdK, SdK_0) & \to & H_{k-1}(SdK_0) & \to & \cdots
\end{array} \qquad (1)$$

显然, 在每个方块中, 箭头是可以交换的.

又, 标准链映射 $\pi_k : C_k(SdK) \to C_k(K)$ 是由恒同映射 $1 : |SdK| \to |K|$ 的单纯逼近 π_0 导出的, 故由 (11.7), π_0 也导出相对链复形间的一个链映射

$$\pi_k : C_k(SdK, SdK_0) \to C_k(K, K_0).$$

进而在相对同调群上导出同态

$$\pi_* : H_k(SdK, SdK_0) \to H_k(K, K_0).$$

和重心重分同态一样，标准同态也在 (K,K_0) 和 (SdK,SdK_0) 的正合同调序列之间建立了如下的可换图 (注意，这里的箭头方向和 (1) 中的相反):

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \to & H_k(SdK_0) & \to & H_k(SdK) & \to \\
 & & \pi_{k_*}^{K_0}\downarrow & & \pi_{k_*}^{K}\downarrow & \\
\cdots & \to & H_k(K_0) & \to & H_k(K) & \to
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
H_k(SdK,SdK_0) & \to & H_{k-1}(SdK_0) & \to & \cdots \\
\pi_*\downarrow & & \pi_{k-1_*}^{K_0}\downarrow & & \\
H_k(K,K_0) & \to & H_{k-1}(K_0) & \to & \cdots
\end{array}$$

由 (7.21), 知 $\pi_k Sd_k = 1$. 因此

$$\pi_* Sd_* = 1 : H_k(K,K_0) \to H_k(K,K_0).$$

又由 (7.23) 和它的证明，知在相对的情形， $Sd_k \circ \pi_k$ 和恒同映射 1 也是链同伦的，因此它们在相对同调群上导出同一同态，即

$$Sd_* \pi_* = 1 : H_k(SdK,SdK_0) \to H_k(SdK,SdK_0).$$

有了相对情形的重心重分同态和标准同态，我们就可以由映射 $\varphi : (K,K_0) \to (L,L_0)$ 得到同态

$$\varphi_{k_*} : H_k(K,K_0) \to H_k(L,L_0).$$

实际上，它就是合成

$$H_k(K,K_0) \xrightarrow{Sd_*^m} H_k(Sd^m K, Sd^m K_0) \xrightarrow{f_{k*}} H_k(L,L_0), \qquad (2)$$

其中 $f : (Sd^m K, Sd^m K_0) \to (L,L_0)$ 是由 $\varphi : Sd^m K \to L$ 的单纯逼近 $f : Sd^m K \to L$ (参见 10.7) 导出，此处 m 为一足够大的自然数.

和在绝对的情形一样，同态 φ_{k*} 完全由 φ 决定，而与 m 及单纯逼近 f 的取法无关.

这样，由映射 $\varphi:(K,K_0)\to(L,L_0)$ 就得到同态 φ_{k*} : $H_k(K,K_0)\to H_k(L,L_0)$.

11.8 命题 映射 $\varphi:(K,K_0)\to(L,L_0)$ 在 (K,K_0) 和 (L,L_0) 的正合同调序列间导出一组同态，这些同态使图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \to & H_k(K_0) & \to & H_k(K) & \to & H_k(K,K_0) & \to & H_{k-1}(K_0) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow \varphi_{k_*}^{K_0} & & \downarrow \varphi_{k_*}^{K} & & \downarrow \varphi_{k_*} & & \downarrow \varphi_{k-1_*}^{K_0} & & \\
\cdots & \to & H_k(L_0) & \to & H_k(L) & \to & H_k(L,L_0) & \to & H_{k-1}(L_0) & \to & \cdots
\end{array} \tag{3}$$

可换.

证明 假定 $\varphi_{k_*}=f_{k_*}\circ Sd_*^m$ (参见 (2)). 那么 (3) 变为 (1)

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \to & H_k(K_0) & \to & H_k(K) & \to \\
 & & \downarrow Sd_k^{K_0,m}\ \text{1)} & & \downarrow Sd_k^m & \\
\cdots & \to & H_k(Sd^m K_0) & \to & H_k(Sd^m K) & \to \\
 & & \downarrow f_k^{K_0} & & \downarrow f_k^K & \\
\cdots & \to & H_k(L_0) & \to & H_k(L) & \to
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
H_k(K,K_0) & \to & H_{k-1}(K_0) & \to & \cdots \\
\downarrow Sd_*^m & & \downarrow Sd_{k-1}^{K_0,m} & & \\
H_k(SdK,Sd^m K_0) & \to & H_{k-1}(Sd^m K_0) & \to & \cdots \\
\downarrow f_{k_*} & & \downarrow f_{k-1}^{K_0} & & \\
H_k(L,L_0) & \to & H_{k-1}(L_0) & \to & \cdots
\end{array}$$

---

1) 记号 $Sd_k^m(Sd_k^{K_0,m})$ 表示 $K(K_0)$ 的 m 个重心重分同态的合成，$f_k^K(f_k^{K_0})$ 是由单纯逼近 $f:Sd^m K\to L(Sd^m K_0\to L_0)$ 导出.

这时，上半部的诸方块，由 (1)，知为可换. 至于下半部的方块，由于诸垂直箭头都是由单纯映射 $f:(Sd^mK, Sd^mK_0)\to(L,L_0)$ 导出，因此在链群时已可换，过渡到同调群，交换性当然继续保持. 从而命题得证. ◁

有了以上准备，我们就可以来证明相对同调群是伦型不变量. 为此，先证明一个

11.9 引理 在群和同态所构成的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \downarrow\varphi_1 & & \downarrow\varphi_2 & & \downarrow\varphi_3 & & \downarrow\varphi_4 & & \downarrow\varphi_5 \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5 \end{array}$$

中，如果行正合，那么

(i) 当 φ_4 为单， φ_1 为满时， $\operatorname{Ker}\varphi_3=\alpha_2(\operatorname{Ker}\varphi_2)$;

(ii) 当 φ_2 为满， φ_5 为单时， $\operatorname{Im}\varphi_3=\beta_3^{-1}(\operatorname{Im}\varphi_4)$.

证明 (i) $\alpha_2(\operatorname{Ker}\varphi_2)\subset\operatorname{Ker}\varphi_3$ 由交换性立知. 因此余下的是证明 $\operatorname{Ker}\varphi_3\subset\alpha_2(\operatorname{Ker}\varphi_2)$.

设 $a_3\in\operatorname{Ker}\varphi_3$. 于是 $\varphi_3(a_3)=0$. 由 $\beta_3\varphi_3=\varphi_4\alpha_3$，知 $\varphi_4\alpha_3(a_3)=0$. 但 φ_4 为单，故 $\alpha_3(a_3)=0$. 由行正合，知有 $a_2\in A_2$ 使 $\alpha_2(a_2)=a_3$. 由 $\beta_2\varphi_2=\varphi_3\alpha_2$ 及 $\varphi_3(a_3)=0$，知 $\beta_2\varphi_2(a_2)=0$, 即 $\varphi_2(a_2)\in\operatorname{Ker}\beta_2=\operatorname{Im}\beta_1$. 故有 $b_1\in B_1$ 使 $\beta_1(b_1)=\varphi_2(a_2)$. 另一方面，按假定 φ_1 为满，故有 $a_1\in A_1$ 使 $\varphi_1(a_1)=b_1$. 这样 $\beta_1\varphi_1(a_1)=\varphi_2(a_2)$. 注意，由交换性 $\beta_1\varphi_1=\varphi_2\alpha_1$, 知 $\varphi_2(a_2)=\varphi_2\alpha_1(a_1)$, 故 $a_2-\alpha_1(a_1)\in\operatorname{Ker}\varphi_2$. 但 $\alpha_2(a_2-\alpha_1(a_1))=\alpha_2(a_2)-\alpha_2\alpha_1(a_1)=\alpha_2(a_2)=a_3$. 现在 $\varphi_2(a_2-\alpha_1(a_1))=\varphi_2(a_2)-\varphi_2\alpha_1(a_1)=\varphi_2(a_2)-\beta_1\varphi_1(a_1)=\varphi_2(a_2)-\beta_1(b_1)=\varphi_2(a_2)-\varphi_2(a_2)=0$, 即 $(a_2-\alpha_1(a_1))\in\operatorname{Ker}\varphi_2$. 故 $a_3=\alpha_2(a_2-\alpha_1(a_1))\in\alpha_2(\operatorname{Ker}\varphi_2)$.

(ii) $\operatorname{Im}\varphi_3\subset\beta_3^{-1}(\operatorname{Im}\varphi_4)$ 由交换性立知. 因此只要证 $\beta_3^{-1}(\operatorname{Im}\varphi_4)\subset\operatorname{Im}\varphi_3$.

设 $b_3\in\beta_3^{-1}(\operatorname{Im}\varphi_4)$, 即 $\beta_3(b_3)=\varphi_4(a_4)$, 这里 $a_4\in A_4$.

现在 $\varphi_5\alpha_4(a_4) = \beta_4\varphi_4(a_4) = \beta_4\beta_3(b_3) = 0$. 由假定 φ_5 为单，故 $\alpha_4(a_4) = 0$. 又由正合性，知有 $a_3 \in A_3$ 使 $\alpha_3(a_3) = a_4$. 而 $b_3 - \varphi_3(a_3) \in \text{Ker}\beta_3$. 实际上， $\beta_3(b_3 - \varphi_3(a_3)) = \beta_3(b_3) - \beta_3\varphi_3(a_3) = \varphi_4(a_4) - \varphi_4\alpha_3(a_3) = \varphi_4(a_4) - \varphi_4(a_4) = 0$. 由正合性 $\text{Ker}\beta_3 = \text{Im}\beta_2$. 故有 $b_2 \in B_2$ 使 $\beta_2(b_2) = b_3 - \varphi_3(a_3)$, 再由假定 φ_2 为满，知有 $a_2 \in A_2$ 使 $\varphi_2(a_2) = b_2$. 于是 $\beta_2\varphi_2(a_2) = b_3 - \varphi_3(a_3)$. 另一方面, 由交换性，$\beta_2\varphi_2 = \varphi_3\alpha_2$, 故 $b_3 - \varphi_3(a_3) = \varphi_3\alpha_2(a_2)$. 于是 $b_3 = \varphi_3(a_3) + \varphi_3\alpha_2(a_2) = \varphi_3(a_3 + \alpha_2(a_2)) \in \text{Im}\varphi_3$. ◁

11.10 推论 (5 引理) 如果在群和同态所构成的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \downarrow\varphi_1 & & \downarrow\varphi_2 & & \downarrow\varphi_3 & & \downarrow\varphi_4 & & \downarrow\varphi_5 \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5 \end{array}$$

中，行正合， φ_i 为同构， $i = 1, 2, 4, 5$, 那么 φ_3 也是同构.

证明 在所给的条件下. 上述引理断言:

$$\text{Ker}\varphi_3 = \alpha_2(\text{Ker}\varphi_2), \quad \text{Im}\varphi_3 = \beta_3^{-1}(\text{Im}\varphi_4).$$

现在 φ_2 为同构，故 $\text{Ker}\varphi_2 = 0$. 于是 $\text{Ker}\varphi_3 = 0$. 又由假定 φ_4 为满，故 $\beta_3^{-1}(\text{Im}\varphi_4) = \beta_3^{-1}(B_4) = B_3$. 所以 $\text{Im}\varphi_3 = B_3$. ◁

11.11 定理 (相对同调群的同伦不变性) 对复形偶 (K, K_0) 和 (L, L_0), 若映射 $\varphi : (K, K_0) \to (L, L_0)$ 为同伦等价. 那么它们的相对同调群同构，而且

$$\varphi_{k_*} : H_k(K, K_0) \to H_k(L, L_0)$$

为同构.

证明 由 (11.3) 后的 ¡, 我们知道同伦等价 $\varphi : (K, K_0) \to (L, L_0)$ 使 $\varphi|K : K \to L$ 和 $\varphi|K_0 : K_0 \to L_0$ 也都是同伦等价. 因此由 (8.29),

$$\varphi_{k_*}^{K_0} : H_k(K_0) \to H_k(L_0)$$

和

$$\varphi^K_{k_*}: H_k(K) \to H_k(L)$$

都是同构. 于是对 (3) 用 (11.10), 就得到

$$\varphi_{k_*}: H_k(K, K_0) \to H_k(L, L_0)$$

为同构. ◁

至此, 我们证明了相对同调群的同伦不变性 (它也包含了拓扑不变性). 当然, 我们也可以采用另一种办法来证明. 即采用和绝对情形相平行的办法. 但我们不详细写出, 请读者作为练习, 自行补出. 在这种证明里, 以下的命题是重要的.

11.12 命题 恒同映射 $1: (K, K_0) \to (K, K_0)$ 导出恒同同态, 即

$$1_{k_*} = 1: H_k(K, K_0) \to H_k(K, K_0). \quad ◁$$

11.13 命题 对于映射 $\varphi: (K, K_0) \to (L, L_0)$ 和 $\psi: (L, L_0) \to (M, M_0)$, 我们有

$$(\psi \circ \varphi)_{k_*} = \psi_{k_*} \circ \varphi_{k_*}: H_k(K, K_0) \to H_k(M, M_0). \quad ◁$$

11.14 命题 若映射 $\varphi_0: (K, K_0) \to (L, L_0)$ 和映射 $\varphi_1: (K, K_0) \to (L, L_0)$ 同伦, 那么

$$\varphi_{0_*} = \varphi_{1_*}: H_k(K, K_0) \to H_k(L, L_0). \quad ◁$$

以上诸命题的证明都很简单, 因此我们只指出它们而不证.

§12. Mayer-Vietoris 序列

复形偶 (K, L) 的正合同调序列将复形 K 和它的子复形 L, 以及 K 相对于 L 的同调群这三者联系了起来. 那么, 给定复形 K 的两个子复形 L_1 和 L_2 以后, 在子复形 $L_1 \cup L_2, L_1, L_2$ 和

$L_1 \cap L_2$ 的同调群之间，理应存在关系．现在问，这个关系为何？下面的定理回答了这个问题．

12.1　定理　若 L_1 和 L_2 是复形 K 的子复形，那么存在着如下的正合序列

$$\begin{aligned}\cdots \to H_k(L_1 \cap L_2) &\xrightarrow{(i_*, i'_*)} H_k(L_1) \oplus H_k(L_2) \xrightarrow{k_* - l_*} \\ &\to H_k(L_1 \cup L_2) \xrightarrow{\tilde{\triangle}_k} H_{k-1}(L_1 \cap L_2) \to \cdots,\end{aligned} \tag{1}$$

其中 i, i', k, l 均为置入映射，$\tilde{\triangle}_k : H_k(L_1 \cup L_2) \to H_{k-1}(L_1 \cap L_2)$ 为合成

$$H_k(L_1 \cup L_2) \to H_k(L_1 \cup L_2, L_2) \xrightarrow{\tau_*^{-1}} H_k(L_1, L_1 \cap L_2)$$

$$\xrightarrow{\triangle_k} H_{k-1}(L_1 \cap L_2),$$

这里 τ_* 为切除定理 (10.12) 中的同构．

为了证明这个定理，我们需要

12.2　引理　在行正合的可换梯形

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \to & A_n & \xrightarrow{i_n} & B_n & \xrightarrow{j_n} & C_n & \xrightarrow{k_n} & A_{n-1} & \to & \cdots \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow g_n & & \downarrow h_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \to & A'_n & \xrightarrow{i'_n} & B'_n & \xrightarrow{j'_n} & C'_n & \xrightarrow{k'_n} & A'_{n-1} & \to & \cdots \end{array}$$

中，如果同态 $h_n : C_n \to C'_n$ 对所有的 n 均为同构，那么以下的序列正合：

$$\cdots \to A_n \xrightarrow{(i_n, f_n)} B_n \oplus A'_n \xrightarrow{g_n - i'_n} B'_n \xrightarrow{k_n h_n^{-1} j'_n} A_{n-1} \to \cdots,$$

其中

$$\begin{aligned}(i_n, f_n)(a_n) = i_n(a_n) \oplus f_n(a_n), (g_n - i'_n)&(b_n \oplus a'_n) \\ = g_n(b_n) - i'_n(a'_n).&\end{aligned}$$

证明　直接验算就可以知道．下面以 $B_n \oplus A'_n$ 处的正合性为例验算一下．

首先，$\text{Im}(i_n, f_n) \subset \text{Ker}(g_n - i'_n)$ 是显然的. 所以只要证明反方向的包含关系就可以了.

设 $b_n \oplus a'_n \in \text{Ker}(g_n - i'_n)$, 即 $g_n(b_n) - i'_n(a'_n) = 0$. 于是 $j'_n g_n(b_n) = j'_n i'_n(a'_n) = 0$, 即 $h_n j_n(b_n) = j'_n g_n(b_n) = 0$. 由于 h_n 为同构，故 $j_n(b_n) = 0$. 这样 $b_n \in \text{Ker} j_n = \text{Im} i_n$. 故有 $a_n \in A_n$ 使 $i_n(a_n) = b_n$.

考虑 A'_n 中的元 $a'_n - f_n(a_n)$. 我们说它属于 $\text{Ker} i'_n$. 实际上, $i'_n(a'_n - f_n(a_n)) = i'_n(a'_n) - i'_n f_n(a_n) = i'_n(a'_n) - g_n i_n(a_n) = i'_n(a'_n) - g_n(b_n) = 0$. 再由 $\text{Ker} i'_n = \text{Im} k'_{n+1}$, 知有 c'_{n+1} 使 $k'_{n+1}(c'_{n+1}) = a'_n - f_n(a_n)$.

注意 h_{n+1} 为同构, 故有 $h^{-1}_{n+1}(c'_{n+1})$, 记为 c. 于是 $a'_n - f_n(a_n) = k'_{n+1}(c'_{n+1}) = k'_{n+1}(h_{n+1} h^{-1}_{n+1}(c'_{n+1})) = k'_{n+1}(h_{n+1}(c)) = f_n k_{n+1}(c)$ A#, 即 $a'_n = f_n(a_n) + f_n k_{n+1}(c) = f_n(a_n + k_{n+1}(c))$.

现在命 $\alpha_n = a_n + k_{n+1}(c)$. 那么

$$(i_n, f_n)(\alpha_n) = i_n(\alpha_n) \oplus f_n(\alpha_n) = i_n(a_n + k_{n+1}(c))$$

$$\oplus f_n(a_n + k_{n+1}(c)) = i_n(a_n) \oplus a'_n = b_n \oplus a'_n.$$

所以 $\text{Ker}(g_n - i'_n) \subset \text{Im}(i_n, f_n)$. ◁

(12.1) 的证明.

在行正合的可换梯形

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdots & \to & H_k(L_1 \cap L_2) & \xrightarrow{i_*} & H_k(L_1) & \to \\
& & \downarrow i'_* & & \downarrow k_* & \\
\cdots & \to & H_k(L_2) & \xrightarrow{l_*} & H_k(L_1 \cup L_2) & \to
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_k(L_1, L_1 \cap L_2) & \to & \cdots \\
\downarrow \tau_* & & \\
H_k(L_1 \cup L_2, L_2) & \to & \cdots
\end{array}$$

中，由于 τ_* 为同构. 故可对它用 (12.2) 从而得 (1). ◁

从行正合的下述可换梯形

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots & \to & H_k(L_1\cap L_2) & \xrightarrow{i'_*} & H_k(L_2) & \to \\ & & \downarrow i_* & & \downarrow l_* & \\ \cdots & \to & H_k(L_1) & \xrightarrow{k_*} & H_k(L_1\cup L_2) & \to \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H_k(L_2, L_1\cap L_2) & \to & \cdots \\ \downarrow \tau'_* & & \\ H_k(L_1\cup L_2, L_2) & \to & \cdots \end{array}$$

出发，由于 $\tau'_*: H_k(L_2, L_1\cap L_2) \to H_k(L_1\cup L_2, L_1)$ 对所有的 k 也都是同构，因此也可以得到一个正合序列. 不过这时相应的各同态有些变化，特别是 $\tilde{\Delta}_k$ 变化较大.

12.3 定义 正合序列 (1) 称为复形 K 的 **子复形** L_1 **和** L_2 **的** Mayer-Vietoris **序列**. 有时也略去 K，而直呼为 L_1 和 L_2 的 Mayer-Vietoris 序列.

12.4 定理 若 L_1 和 L_2 是复形 K 的子复形，又 M 为 $L_1\cap L_2$ 的子复形，那么存在着如下的两个正合序列

$$\cdots\to H_k(L_1\cap L_2, M)\to H_k(L_1, M)\oplus H_k(L_2, M)\to$$

$$\to H_k(L_1\cup L_2, M)\to H_{k-1}(L_1\cap L_2, M)\to\cdots$$

和

$$\cdots\to H_k(K, L_1\cap L_2)\to H_k(K, L_1)\oplus H_k(K, L_2)\to$$

$$\to H_k(K, L_1\cup L_2)\to H_{k-1}(K, L_1\cap L_2)\to\cdots.$$

它们也被称为 (相对情形的)Mayer-Vietoris 序列.

证明 这时只要分别对可换梯形

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots & \to & H_k(L_1\cap L_2, M) & \to & H_k(L_1, M) & \to \\ & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & \to & H_k(L_2, M) & \to & H_k(L_1\cup L_2, M) & \to \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H_k(L_1, L_1\cap L_2) & \to & \cdots \\ \downarrow & & \\ H_k(L_1\cup L_2, L_2) & \to & \cdots \end{array}$$

和

$$\begin{array}{ccccc}\cdots & \to & H_k(K, L_1\cap L_2) & \to & H_k(K, L_1) & \to \\ & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & \to & H_k(K, L_2) & \to & H_k(K, L_1\cup L_2) & \to \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}H_{k-1}(L_1, L_1\cap L_2) & \to & \cdots \\ \downarrow & & \\ H_k(L_1\cup L_2, L_2) & \to & \cdots\end{array}$$

用 (12.2) 即可. ◁

Mayer-Vietoris 序列 (1), 不仅可以相对化，而且对约化同调也成立.

12.5 定理 对于复形 K 的子复形 L_1 和 L_2, 如果 $L_1\cap L_2$ 非空，则存在着约化的 Mayer-Vietoris(正合) 序列

$$\cdots\to \tilde{H}_k(L_1\cap L_2)\to \tilde{H}_k(L_1)\oplus \tilde{H}_k(L_2)\to$$

$$\to \tilde{H}_k(L_1\cup L_2)\to \tilde{H}_{k-1}(L_1\cap L_2)\to\cdots.$$

证明 这时要证明的只是 $k=0$ 部分. 但这时可像 (10.16) 那样来证明. ◁

12.6 定理 设 L_1 和 L_2 为复形 K 的子复形, L_1' 和 L_2' 为复形 K' 的子复形, 又 $\varphi: K\to K'$ 使

$$\varphi|_{L_i}: L_i\to L_i',\quad i=1,2.$$

那么在 Mayer-Vietoris 序列间有以下的可换梯形存在:

$$\begin{array}{ccccc}\cdots & \to & H_k(L_1\cap L_2) & \to & H_k(L_1)\oplus H_k(L_2) & \to \\ & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & \to & H_k(L_1'\cap L_2') & \to & H_k(L_1')\oplus H_k(L_2') & \to \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}H_k(L_1\cup L_2) & \to & \cdots \\ \downarrow & & \\ H_k(L_1'\cup L_2') & \to & \cdots,\end{array}$$

其中垂直的同态均由 φ 导出.

证明 直接验证每个方块即可. ◁

下面是 Mayer-Vietoris 定理的一个应用.

12.7 **定义** 复形 K 的双角锥 $S(K)=aK\cup bK$, 这里 aK, bK 分别为 K 上的两个锥形, 但它们所决定的多面体只交于 $|K|$.

12.8 **例** $S(S^{n-1})=S^n$.

12.9 **定理** 对于复形 K 而言, 我们有

$$\tilde{H}_k(S(K))\cong\tilde{H}_{k-1}(K).$$

证明 命 $L_1=aK, L_2=bK$, 那么 $S(K)=L_1\cup L_2, L_1\cap L_2=K$. 故由 (12.5), 我们有如下的 Mayer-Vietoris 正合序列

$$\begin{array}{ccccccccc}\cdots & \to & \tilde{H}_k(K) & \to & \tilde{H}_k(aK)\oplus\tilde{H}_k(bK) & \to & \tilde{H}_k(S(K)) \\ & \to & \tilde{H}_{k-1}(K) & \to & \tilde{H}_{k-1}(aK)\oplus\tilde{H}_{k-1}(bK) & \to & \cdots\end{array}$$

由 (6.13), $\tilde{H}_k(aK)=\tilde{H}_k(bK)=0$. 于是

$$\tilde{H}_k(S(K))\cong\tilde{H}_{k-1}(K)$$

◁

12.10 **推论** 对于球面 S^n 而言, 我们有

$$\tilde{H}_k(S^n)=\begin{cases}0, & k\neq n,\\ \mathbb{Z}, & k=n.\end{cases}$$

证明 由 (12.9), 我们有

$$\tilde{H}_k(S^n)\cong\tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})\cong\cdots\cong\tilde{H}_0(S^{n-k}).$$

注意, 当 $n=k$ 时, S^0 由两点构成, 故

$$\tilde{H}_0(S^0)=\mathbb{Z}.$$

当 $n<k$ 时, 按定义, $\tilde{H}_k(S^n)=0$. 当 $n>k$ 时, S^{n-k} 连通, 因此 $\tilde{H}_0(S^{n-k})=0$, 故 $\tilde{H}_k(S^n)=0$. 这样推论得证. ◁

第四章 范畴论初步

我们知道，代数拓扑学是使用代数方法来解决拓扑问题的. 那么如何做到这一点呢？在前几章里面，我们已经看到，为了做到这一点，我们固定一个整数 k, 为每个空间 (多面体) 对应上一个 (k 维同调) 群. 这样，我们就从几何 (空间、多面体) 转向了代数 (群). 但是，这种转化如果仅限于空间本身，作用并不大. 我们在同调群的不变性证明中已经看到，只有把空间放在一起予以比较时，不同空间的特性才能更好的显露出来. 在空间 (群) 的情形，能将它们联系起来的，当然是映射 (同态). 因此我们还对联系多面体的每个映射，对应上一个相应的群同态. 亦即，我们不仅把空间转化为一个代数系统 (在这里是群), 而且把联系空间与空间的映射转化为联系群与群的同态，从而在更深、更有效的层次上完成了从几何向代数的过渡. 这种“全方位”的过渡显示出巨大的威力 (参见同调群不变性的证明).

上述这种既要考虑实体，也要考虑不同实体间的联系的“全方位”观点，实际上，在建立同调群的整个过程中都存在.

我们知道同调群的建立是通过以下几步完成:

空间 (多面体)—— 复形 —— 链复形 —— 同调群.

这时联系复形的是单纯映射, 联系链复形的是链映射. 因此, 自然会问, 能否将这些不同的实体和实体间的联系统一处理？ Eilenberg 和 MacLane 在 1945 年提出范畴论，不仅解决了这一问题，而且为这一领域的蓬勃发展奠定了基础.

范畴论不仅将实体和实体间的联系予以抽象, 得到范畴概念, 而且也将从一个范畴到另一范畴的转化进行概括, 得到函子概念. 我们知道，就同调群的情形而言，转化时的“函子性”(8.19) 和 (8.20) 成立是一个极其重要的性质. 因此，函子概念将这一内容包括进去就很自然 (参见下面的函子定义).

如果我们把函子视为范畴与范畴间的联系的话，那么，在函子之间也应有联系．在范畴论中，这就是自然变换．所有这些，我们在下一节中予以介绍．

§13. 范畴、函子、自然变换

13.1　定义　一个 **范畴**$\mathcal{C}$ 由三部分组成：

1) "对象" X 的一个类 ob $\mathcal{C}$;

2) 对于对象的一个二元有序组 (X,Y), 有一个由 "射" 组成的集 $\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$[1];

3) 对于对象的一个三元有序组 (X,Y,Z), 有一个对应 [2]

$$\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)\times\hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)\to\hom_{\mathcal{C}}(X,Z),$$

$$(f,g)\mapsto g\circ f.$$

它们适合

$\mathcal{C}$ 1) $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$[3]

$\mathcal{C}$ 2) 对每个对象 X, 有 $1_X\in\hom_{\mathcal{C}}(X,X)$ 使

$$1_X\circ f=f,\ 这里\ f\in\hom_{\mathcal{C}}(W,X),W\in\mathrm{ob}\mathcal{C};$$

$$g\circ 1_X=g,\ 这里\ g\in\hom_{\mathcal{C}}(X,Y),Y\in\mathrm{ob}\mathcal{C}.$$

13.2　例　$\mathcal{C}=\mathrm{Set}$. 这时 "对象" 为集，"射" 为集间的对应．合成为通常的对应合成．显然，它们构成一个范畴．

$\mathcal{C}=\mathrm{Top}$. 这时 "对象" 为拓扑空间，"射" 为映射，合成为通常的映射合成．

---

1) 这个集可以是空集，但当 $f\in\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 时也记为 $f:X\to Y$. 在不混淆时，简记 $\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 为 $\hom(X,Y)$.

2) 这个对应叫做射的合成.

3) 这个等式在一端有意义时，另一端也有意义，而且相等.

$\mathcal{C} = \mathrm{Top}^2$. 这时“对象”为拓扑空间偶 (X, A), “射”为偶间的映射. 合成为通常的映射合成.

$\mathcal{C} = \mathcal{P}^2$, 这时“对象”为多面体偶, “射”为偶间映射. 合成为映射的合成.

$\mathcal{C} = \mathrm{Grp}$, 这时“对象”为群, “射”为同态. 合成为通常的同态合成.

$\mathcal{C} = \mathrm{Ab}$. 这时“对象”为交换群, “射”为同态, 合成为通常的同态合成.

¡ 比较范畴 Grp 和 Ab 将会发现, $\mathrm{ob}\mathrm{Ab} \subset \mathrm{ob}\mathrm{Grp}, \hom_{\mathrm{Ab}}(X, Y) \subset \hom_{\mathrm{Grp}}(X, Y)$. 又合成 $\hom_{\mathrm{Ab}}(X, Y) \times \hom_{\mathrm{Ab}}(Y, Z) \to \hom_{\mathrm{Ab}}(X, Z)$ 是下指标为 Grp 时的合成在 Ab 时的限制. 因此称 Ab 为 Grp 的子范畴是合适的, 一般而言, 我们有

13.3 定义 范畴 $\mathcal{A}$ 称为范畴 $\mathcal{C}$ 的 **子范畴**, 如果 $\mathrm{ob}\mathcal{A} \subset \mathrm{ob}\mathcal{C}$, 又 $\hom_{\mathcal{A}}(X, Y) \subset \hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 对所有的 $X, Y \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 成立. 最后 $\mathcal{A}$ 中射的合成为 $\mathcal{C}$ 中射的合成的限制.

$\mathcal{C} = \mathrm{Top}_*$. 这是 Top 的一个子范畴, 它的对象是 (X, P), 这里 P 为 X 的一个点, 叫做 **基点**.

$\mathcal{C} = \mathcal{P}$, 这是 Top 的另一个子范畴, 这时“对象”为多面体, “射”为多面体间的映射. 合成为映射的合成.

$\mathcal{C} = \mathrm{Vec}_F$, 这时对象为域 F 上的有限维向量空间, 射为线性变换. 合成为线性变换的合成.

$\mathcal{C} = \mathcal{K}$, 这时“对象”为复形, “射”为单纯映射, 合成为单纯映射的合成.

$\mathcal{C} = \mathrm{Comp}$, 这时“对象”为 **链复形**$K$, 即由称为链群的交换群和称为边缘的同态构成的一个序列

$$K : \cdots \to C_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \to \cdots \quad n \in \mathbb{Z},$$

适合条件 $\partial_n \partial_{n+1} = 0$. “射”为链映射 $f : K \to L$, 即由一组同

态 $\{f_n : C_n(K) \to C_n(L)\}$ 组成，它们使下图可换

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & C_{n+1}(K) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(K) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(K) & \to \cdots \\
 & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & \\
\cdots \to & C_{n+1}(L) & \to & C_n(L) & \to & C_{n-1}(L) & \to \cdots
\end{array}.$$

$f = \{f_n\}$ 和 $g = \{g_n\}$ 的合成 $g \circ f = \{g_n \circ f_n\}$.

以上的这些例子，充分说明了范畴是我们已经遇到过的许多实体的概括. 不过，下面的例子可能有些意外.

13.4　例　群 $G = \{g\}$ 是一个特殊的范畴. 它的"对象"只有一个元素，记为 O, $\hom(O, O)$ 和 $\{g\}$ 一一对应，范畴中的合成按 G 中的相应合成进行.

¡　这个例子是带有启发性的. 因为群 G 中的元素并不是相应范畴中的"对象". 实际上，在这里 G 中的元素对应于"射". 这种利用"射", 不引用"对象"来描述群的办法，对其它的代数结构也有效.

13.5　例　幺半群　集 M 叫做一个幺半群，如果存在两个函数

$$\mu : M \times M \to M, \quad \eta : P \to M^{1)}$$

使下面两个图可换

$$\begin{array}{ccc}
M \times M \times M & \xrightarrow{1 \times \mu} & M \times M \\
\downarrow \mu \times 1 & & \downarrow \mu \\
M \times M & \xrightarrow{\mu} & M
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
P \times M & \xrightarrow{\eta \times 1} & M \times M & \xleftarrow{1 \times \eta} & M \times P \\
 & \lambda_1 \searrow & \downarrow & \swarrow \lambda_2 & \\
 & & M & &
\end{array}$$

其中 $\lambda_1(P, x) = x = \lambda_2(x, P)$.

在范畴里面，也可以不引用"元素"而定义"射"的单和满等概念.

13.6　定义　范畴 C 里的射 $k : X \to Y$ 称为满的，如果右消去律成立，即：对任意两个射 $g_1, g_2 : Y \to Z$, 由 $g_1 \circ h = g_2 \circ h$ 推

1) 这里 P 为单点集合.

出 $g_1 = g_2$. 又 $m: X \to Y$ 称为单的，如果左消去律成立，即：对任意两个射 $f_1, f_2: W \to X$. 由 $m \circ f_1 = m \circ f_2$ 推出 $f_1 = f_2$.

¡ 在范畴 Grp 里，单射就是单同态. 在范畴 Set 里，满射就是满函数.

13.7 定义 范畴 $\mathcal{C}$ 中的射 $e: X \to Y$ 称为同构，如果存在射 $e': Y \to X$ 使 $e' \circ e = 1_X, e \circ e' = 1_Y$. 这时也称 X 和 Y 同构.

¡ 一般而言，射既满又单并不表示它就是同构.

13.8 定义 范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 T 叫做 **终端元**，如果对所有的 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, $\hom(X,T)$ 均由一个射组成. S 称为 **起始元**，如果对所有的 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{C}, \hom(S,Y)$ 均由一个射组成. 既是终端元，又是起始元的对象，叫做 **零对象**.

¡ 在 Set 和 Top 中，空集为起始元，单点集为终端元，而在 Grp 中，由一个元素构成的群，既为起始元也为终端元，故为零对象.

13.9 命题 终端元均同构，起始元均同构. ◁

从以上的讨论可以看出，范畴概念可以说是从概括、统一处理诸如空间 (多面体) 及联系它们的映射，复形及联系它们的单纯映射等等而抽象出来的. 可和其他的有意义的抽象一样，在它们被确立以后，往往会产生比预期更普遍、更广泛的影响. 范畴论今天已渗透到数学的各个分支，成为数学家的必备知识之一.

我们已经看到，存在着众多的不同范畴. 那么这些不同的范畴之间，当然也应该有联系. 这种将不同范畴联系起来的事物，就是函子，下面是它的确切意义.

13.10 定义 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为范畴. 从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的一个 (协变) 函子 F, 由两部分组成：

1) 对 $\mathcal{C}$ 的每个对象 X, 规定 $\mathcal{D}$ 中的一个对象 $F(X)$ 与之对应；

2) 对 $\mathcal{C}$ 的每个射 $f \in \hom(X,Y)$, 规定 $F(f) \in \hom(F(X), F(Y))$.

它们适合以下条件：

F1) $F(1_X) = 1_{F(X)}$,

F2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

这时将函子 F 记为 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

如果将 2) 和 F2) 分别换为

2') 对 $f \in \hom(X, Y)$, 规定 $F(f) \in \hom(F(Y), F(X))$.

F2') $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

则称 F 为反变函子，仍记为 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

¡ 2') 和 F2') 都是将射的方向倒过来，故称为反变.

13.11 例 (上) 同调群是从 $\mathcal{P}$ 到 Ab 的一个 (反变) 函子.

¡ 我们在同调群的不变性证明中已经看到，映射在同调群间所导出的同态，具有性质 F1) 和 F2) 是何等重要. 因此，在函子的定义中加进这两条是非常自然的.

13.12 例 对复形 K 取链复形 $C_*(K)$ 是从 $\mathcal{K}$ 到 Comp 的一个函子.

13.13 例 设 $\mathcal{C}$ 为范畴， $X \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. 于是 X 导出一个函子 $\hom(X, \quad) : \mathcal{C} \to$Set, 它将每个对象 Y 映为集 $\hom(X, Y)$, 将每个射 $f : Y \to Y'$ 映为 $\hom(X, f) : \hom(X, Y) \to \hom(X, Y')$, 这时 $\hom(X, f)(g) = f \circ g$, 这里 $g \in \hom(X, Y)$.

13.14 例 如下定义的 $R : \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}, R(X, A) = A, R(f) = f|_A : A \to B$ 为函子.

13.15 例 函子的合成也还是函子.

和函子是比较不同的范畴一样，不同的函子也可以比较，自然变换就是比较不同函子的手段.

13.16 定义 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴， $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是两个函子. F 到 G 的一个自然变换 $T : F \to G$ 是一个对应，它为 $\mathcal{C}$ 的每个对象 X, 规定 $\mathcal{D}$ 中的一个射 $T(X) \in \hom(F(X), G(X))$, 适合以下的条件：对每个 $f \in \hom(X, Y)$, 有

$$T(Y) \circ F(f) = G(f) \circ T(X).$$

(或者说，图

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow T(X) & & \downarrow T(Y) \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

可换 1).)

13.17 例 命 $H_n : \mathcal{P}^2 \to Ab$ 是取第 n 个同调群的函子，又函子 $G_n : \mathcal{P}^2 \to Ab$ 为合成 $G_n = H_{n-1} \circ R$，于是边界运算

$$\partial_n : H_n(K, L) \to H_{n-1}(L)$$

决定一个自然变换 $\partial_n : H_n \to G_n$.

13.18 定义 自然变换 $T : F \to G$ 叫做自然等价，如果每个 $T(X)$ 都是同构. 这时也称 F 和 G 为同构.

§14. 进一步的讨论

下面介绍如何从已知范畴得到新范畴.

14.1 定义 给定范畴 $\mathcal{C}$，如下定义的范畴 $\mathcal{C}^*$，叫做 $\mathcal{C}$ 的 **对偶范畴**: $\mathrm{ob}\mathcal{C}^* = \mathrm{ob}\mathcal{C}, \hom_{\mathcal{C}^*}(X, Y) = \hom_{\mathcal{C}}(Y, X), \mathcal{C}^*$ 中的合成为

$$\hom_{\mathcal{C}^*}(X, Y) \times \hom_{\mathcal{C}^*}(Y, Z) \to \hom_{\mathcal{C}^*}(X, Z),$$

$$(f, g) \mapsto f \circ g^{2)}.$$

14.2 命题 范畴 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的反变函子与范畴 $\mathcal{C}^*$ 到 $\mathcal{D}$ 的函子一一对应.

---

1) 范畴中的一个图叫做可换，如果从一个对象"出发"，沿不同的"射"合成能达到同一个对象的话，这些射的不同合成就"相等".

2) 这里的 $\circ$ 为 $\mathcal{C}$ 中的合成.

证明 设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为反变函子，我们造一个函子 $F':\mathcal{C}^*\to\mathcal{D}$ 如下： $F'(X)=F(X)$，这里 $X\in \mathrm{ob}\mathcal{C}^*=\mathrm{ob}\mathcal{C}$. 对 $f\in\hom_{\mathcal{C}^*}(X,Y)=\hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$，规定 $F'(f)=F(f)\in\hom_{\mathcal{D}}(FX,FY)=\hom_{\mathcal{D}}(F'X,F'Y)$. 反过来，对每个函子 $G:\mathcal{C}^*\to\mathcal{D}$，规定反变函子 $G':\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为

$G'(X)=G(X)$，这里 $X\in\mathrm{ob}\mathcal{C}=\mathrm{ob}\mathcal{C}^*$，

$G'(f)=G(f)$，这里 $f\in\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)=\hom_{\mathcal{C}^*}(Y,X)$.

显然，这两个过程互逆．因此得证． $\lhd$

¡ 由于对偶范畴是将原范畴的射“倒’过来．因此，上述命题的成立是可以预期的.

14.3 定义 给定范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$. 如下定义的范畴 $\mathcal{C}\times\mathcal{C}'$ 叫做它们的 **积范畴**.

$$\mathrm{ob}(\mathcal{C}\times\mathcal{C}')=\mathrm{ob}\mathcal{C}\times\mathrm{ob}\mathcal{C}'.$$

$$\hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}'}((X,X'),(Y,Y'))=\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)\times\hom_{\mathcal{C}'}(X',Y'),$$

这里 $X,Y\in\mathrm{ob}\mathcal{C},X',Y'\in\mathrm{ob}\mathcal{C}'$.

$\mathcal{C}\times\mathcal{C}'$ 中的合成为

$$(g,g')\circ(f,f')=(g\circ f,g'\circ f'),$$

这里 $g\in\hom_{\mathcal{C}}(Y,Z),g'\in\hom_{\mathcal{C}'}(Y',Z'),f\in\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $f'\in\hom_{\mathcal{C}'}(X',Y')$.

14.4 定义 对范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$, 如下定义的函子 $\pi_1:\mathcal{C}\times\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$ 叫做投射函子:

$$\pi_1((X,Y))=X,$$

$$\pi_1((f,g))=f.$$

类似的有 $\pi_2:\mathcal{C}\times\mathcal{C}'\to\mathcal{C}'$.

14.5 定义 对范畴 $\mathcal{C}$, 如下定义的函子 $\triangle:\mathcal{C}\to\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ 叫做对角函子: $\triangle(X)=(X,X),\triangle(f)=(f,f)$, 这里 $f:X\to Y$.

以上是从已知的范畴得到新范畴. 我们也有一些从范畴中的对象得到另一些对象的方法. 例如, 在范畴 Grp 中, 给定两个群 (对象)G_1 和 G_2, 我们可以定义它的直积 $G_1 \times G_2$(记为 G) 如下: G 的元为 (g_1, g_2), 这里 $g_i \in G_i, i = 1, 2$. 又乘积

$$(g_1, g_2)(g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2').$$

这时单位元为 $(1_{G_1}, 1_{G_2})$, 逆元 $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$.

在 G 和 G_i 间, 有如下的同态

$$p_i: \ G \to G_i,$$

$$(g_1, g_2) \mapsto g_i, \quad i = 1, 2.$$

现在假定 H 为另一个群, $f_i : H \to G_i, i = 1, 2$ 为同态. 于是可定义同态

$$f: \ H \to G,$$

$$h \mapsto (f_1(h), f_2(h)).$$

显然,

$$p_i f(h) = f_i(h). \tag{1}$$

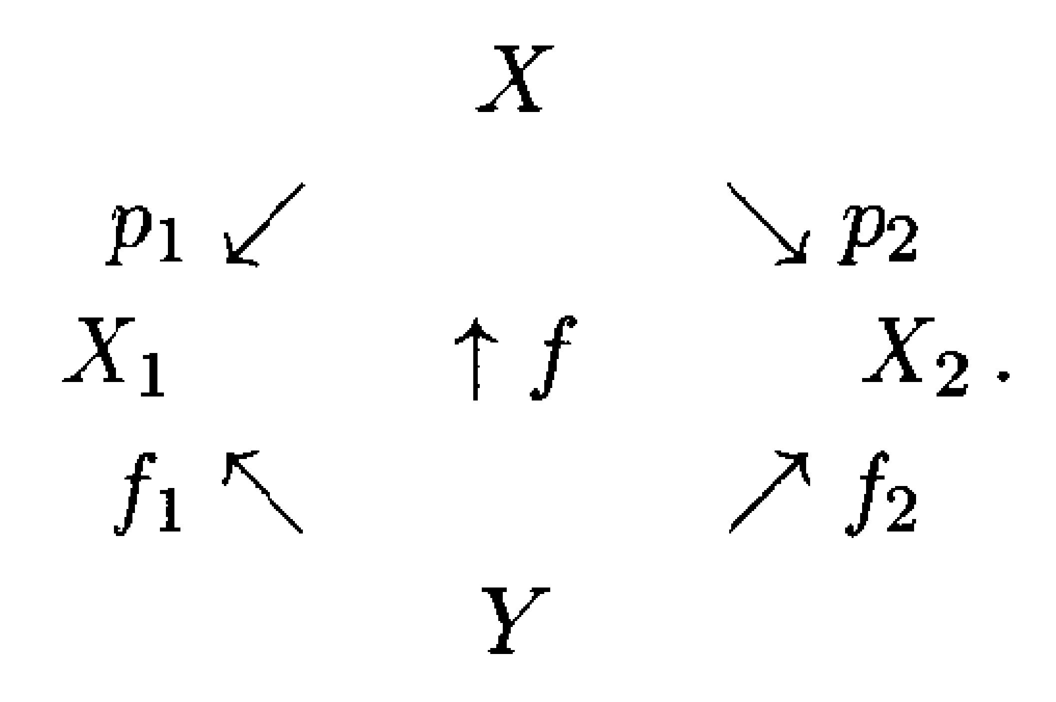
现在设同态 $f' : H \to G$ 使 $p_i f' = f_i, i = 1, 2$, 成立. 那么 $f'(h) = (p_1 f'(h), p_2 h'(h)) = (f_1(h), f_2(h)) = f(h)$. 即 $f' = f$. 因此 f 是使 (1) 成立的唯一同态.

我们将这个过程一般化为:

定义 设 X_1 和 X_2 为范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个对象. X_1 和 X_2 在 $\mathcal{C}$ 中的乘积为三元组 (X, p_1, p_2), 这里 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{C}, p_i \in \mathrm{hom}(X, X_i), i = 1, 2$. 使得 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{C}, f_i \in \mathrm{hom}(Y, X_i), i = 1, 2$ 时, 存在唯一的 $f \in \mathrm{hom}(Y, X)$, 使

$$p_i f = f_i, \quad i = 1, 2.$$

¡ 下图可以帮助记忆:



上述定义也可以换成下面这样陈述:

14.6 定义 设 X_1 和 X_2 为范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个对象，定义一个新的范畴 $\mathcal{P}\{X_1, X_2\}$ 如下：它的对象为三元组 (Y, f_1, f_2)，这里 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{C}, f_i \in \hom(Y, X_i), i = 1, 2$. (Y, f_1, f_2) 和 (Y', f_1', f_2') 间的射为 $f \in \hom(Y, Y')$ 使 $f_i' f = f_i, i = 1, 2$. $\mathcal{P}\{X_1, X_2\}$ 中的终端元称为 X_1 和 X_2 的乘积.

显然，可以将两个对象的乘积定义推广到任意多个对象去.

14.7 例 在 Set 和 Top 里，乘积就是通常的 (卡氏) 积.

取乘积的对偶，我们就得到和的概念.

14.8 定义 设 X_1 和 X_2 为范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个对象，X_1 和 X_2 在 $\mathcal{C}$ 中的和为三元组 (X, i_1, i_2)，这里 $X \in \mathrm{ob}\mathcal{C}, i_k \in \hom(X_k, X), k = 1, 2$，使得 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{C}, f_k \in \hom(X_k, Y), k = 1, 2$ 时，存在唯一的 $f \in \hom(X, Y)$，使

$$f i_k = f_k, \quad k = 1, 2.$$

或者等价地

14.8' 定义 设 X_1 和 X_2 为范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个对象. 定义一个新的范畴 $\mathcal{S}\{X_1, X_2\}$ 如下，它的对象为三元组 (Y, f_1, f_2)，这里 $Y \in \mathrm{ob}\mathcal{C}, f_k \in \hom(X_k, Y), k = 1, 2$. (Y, f_1, f_2) 和 (Y', f_1', f_2') 间的射为 $f \in \hom(Y', Y)$ 使 $f f_k' = f_k, k = 1, 2$. $\mathcal{S}\{X_1, X_2\}$ 中的起始元称为 X_1 和 X_2 的和.

显然，可以将和的概念从两个对象推广到任意多个对象去.

14.9 例 在 Set 里，X_1 和 X_2 的和就是通常的不交并 $X_1 \cup X_2$.

在 Grp 里，和就是自由乘积.

在 Top 里， X_1 和 X_2 的和就是通常的拓扑和，即 $X_1 \cup X_2$ 中的集 U 为开集，当且仅当 $U \cap X_i$ 为 X_i 的开集， $i=1,2$.

¡ 跟乘积的情形一样，和并不是在任意的范畴里都存在.

在乘积与和里，我们都是构作一个新的范畴，然后看它的起始元 (终端元) 是否存在. 下面我们在范畴 Ab 里，对两个指定的对象 A 和 B, 用类似的方法来定义它们的张量积 $A \otimes B$. (参见 §30 开头一段.)

首先在 Ab 里， A 和 B 有乘积 $A \times B$(为什么？). 设 G 为 Ab 中的另外一个对象，那么对每一个变元而言是同态的双线性函数

$$f: A \times B \to G,$$

它本身不一定是同态.

14.10 定义 设 A, B 为范畴 Ab 中的两个对象，考虑范畴 $\mathcal{J}\{A,B\}$, 它的对象是 (G,f), 这里 G 为 Ab 的对象， $f: A \times B \to G$ 为双线性函数. 对象 (G,f) 和 (G',f') 间的射为同态 $h: G \to G'$, 使 $h \circ f = f'$. 如果在 $\mathcal{J}\{A,B\}$ 中存在起始元，则称此起始元为 A 和 B 的张量积.

¡ 根据 13.9, 张量积如果存在, 那么它在同构意义下一定唯一.

14.11 命题 在范畴 Ab 里, 群 A 和 B 的张量积一定存在, 记为 $A \otimes B$.

证明 以 $F(A \times B)$ 表示由 $A \times B$ 生成的自由可换群，即 $F(A \times B)$ 中的元为

$$\sum_i n_i(a_i, b_i),$$

这里和为有限和， $a_i \in A, b_i \in B, n_i \in \mathbb{Z}$. 以 $R(A \times B)$ 表示 $F(A \times B)$ 的一个子集，它由

$$(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b),$$

$$(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2)$$

生成. 于是命 $K = F(A \times B)/R(A \times B), \pi : A \times B \to K$ 和 $p: F(A\times B) \to K$ 均为自然投射. 下面证明 (K, π) 是 $\mathcal{J}\{A, B\}$ 中的起始元. 也即任给双线性函数 $f : A \times B \to G$. 要证明有唯一的同态 $\theta: K \to G$ 使下图

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f} & G \\ & \pi \searrow \quad \nearrow \theta & \\ & K & \end{array} \tag{2}$$

可换.

为此, 注意 $K = F(A\times B)/R(A\times B)$, 这里 $F(A\times B)$ 是以 $A \times B$ 为基的自由可换群. 故有唯一的同态 $\overline{f}: F(A \times B) \to G$ 使图

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f} & G \\ i \downarrow & \overline{f} \nearrow & \uparrow \theta \\ F(A \times B) & \xrightarrow{p} & K \end{array}$$

中的上三角形可换. 由于 f 是双线性的, 故 $R(A\times B) \subset \mathrm{Ker}\overline{f}$. 于是 $\overline{f}$ 导出 $\theta: K \to G$, 即上图中的下三角形可换. 留意 $\pi = p \circ i$, 因此上图合在一起, 就是 (2) 的可换性.

注意 $\pi(a, b)$ 生成 K, 故由 $\theta\pi(a, b) = f(a, b)$ 知 θ 唯一. ◁

¡ 对于向量空间 U, V, 也可类似的定义向量积 $U \otimes V$. 而且 $\dim(U \otimes V) = (\dim U)(\dim V)$.

§15. 范畴 Comp

在定义同调群的过程中, 范畴 Comp 起着重要的作用. 实际上, 进入 Comp 以后, 几何就完全被放在一边, 而纯粹从代数的角度来考虑问题了. 因此, 从代数的角度, 把这一部分内容予以总结, 将有助于同调论的建立.

我们先来回顾一下范畴 Comp 的定义. 它的对象称为链复形, 记作 K, 是由称为链群的交换群和称为边缘的同态构成的一

个序列

$K:$

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \longrightarrow \cdots, \quad n \in \mathbb{Z},$$

适合条件 $\partial_n\partial_{n+1} = 0$. “射” 为链映射 $f: K \to L$, 即由一组同态 $\{f_n : C_n(K) \to C_n(L)\}$ 组成，它们使下图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & C_{n+1}(K) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(K) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(K) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & \\
\cdots \longrightarrow & C_{n+1}(L) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(L) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(L) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

可换. 射 $f = \{f_n : C_n(K) \to C_n(L)\}$ 和 $g = \{g_n : C_n(L) \to C_n(M)\}$ 的合成 $g \circ f = \{g_n \circ f_n : C_n(K) \to C_n(M)\}$.

对于链复形 K, 由 $\partial_n\partial_{n+1} = 0$, 我们可以定义

$$H_n(K) = \mathrm{Ker}\partial_n / \mathrm{Im}\partial_{n+1}, \tag{1}$$

并称之为链复形 K 的第 n 个同调群，而 $\mathrm{Ker}\partial_n$ 和 $\mathrm{Im}\partial_n$ 分别称为链复形 K 的第 n 个闭链群和边缘链群.

15.1 定义 链映射 $f: K \to L$ 和 $g: K \to L$ 称为是链同伦的，如果存在一串同态

$$D = \{D_n : C_n(K) \to C_{n+1}(L)\}$$

使

$$\partial_{n+1}D_n + D_{n-1}\partial_n = f_n - g_n$$

成立. 这时也称 D 为连接 f 和 g 的一个链伦移. 记为 $D: f \simeq g$. 当不强调 D 时，简记为 $f \simeq g$.

链映射 $f: K \to L$ 和 $g: K \to L$ 称为是链同伦逆，如果有

$$fg \simeq 1, gf \simeq 1.$$

这时也称 K 和 L 及 f 和 g 为链等价.

以下的命题，可以象单纯情形那样来证明.

15.2 命题 链映射 $f: K \to L$ 导出同调群间的同态

$$f_{k*}: H_k(K) \to H_k(L).$$

而且

$$(g \circ f)_{k*} = g_{k*} \circ f_{k*},$$

$$id_* = 1.$$

◁

15.3 命题 链映射间的链同伦关系是一个等价关系. 又如果 $f \simeq g: K \to L$, 那么

$$f_{k*} = g_{k*}.$$ ◁

在单纯的情形，点状承载子在构作链伦移时非常有用. 我们可以把它移植到 Comp 来.

15.4 定义 链复形 K 叫做是 **自由的**, 如果 $C_k(K)$ 对所有的 k 均为自由的.

¡ 由复形 K 得到的有向链复形 $C_*(K)$ 是自由的.

15.5 例 从复形 K 出发，我们可以得到另外一个自由链复形 K_0, 它的链群 $C_k(K_0)$ 是由 **有序 k 单形**$\langle v_0v_1\cdots v_k\rangle$ 生成，这里 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ 为 K 的某个单形的顶点. 注意，这里并没要求 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ 不同. 又边缘同态 $\partial_k: C_k(K_0) \to C_{k-1}(K_0)$ 由

$$\partial_k\langle v_0v_1\cdots v_k\rangle = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\langle v_0\cdots \hat{v}_i\cdots v_k\rangle$$

定义. 显然， $K_0 = \{C_k(K_0), \partial_k\}$ 是一个自由链复形，而且当 $k > 0$ 时， $C_k(K_0) \neq 0$. 即它有无限多个非零的链群. 因此这是一个非常大的链复形. 这个链复形叫做 K 的 **有序链复形**.

若 $f: K \to L$ 为复形 K, L 间的一个单纯映射，那么显然它导出一个链映射 $f_0: K_0 \to L_0$. 因此我们得到一个从 K 到 Comp 的函子.

现在我们转向链伦移的构作. 和在单纯的情形一样, 点状承载子是一个有力的工具.

15.6 定义 链复形 $K=\{C_k(K),\partial_k\}$ 叫做是非负的, 如果当 $k<0$ 时, $C_k(K)=0$.

15.7 定义 非负链复形 K 叫做是点状的, 如果

$$H_n(K)=\begin{cases}0, & n\neq 0,\\ \mathbb{Z}, & n=0.\end{cases} \tag{2}$$

15.8 定义 链复形 K 叫做是零调的, 如果 $H_k(K)=0, k\in\mathbb{Z}$. 即: $\mathrm{Im}\partial_{n+1}=\mathrm{Ker}\partial_n$, 或者

$$K:\quad \cdots\to C_{n+1}(K)\xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K)\xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K)\to\cdots$$

为正合.

¡ 由复形 K 得到的有向链复形 $C_*(K)$ 有可能是点状的, 但不可能是零调的.

15.9 定义 对于非负链复形 K, 满同态 $\varepsilon: C_0(K)\to\mathbb{Z}$ 称为增广同态, 如果 $\varepsilon\circ\partial_1=0$. 对于有增广同态 ε 的 K, 有如下的称为增广链复形的 K_ε[1)] 存在:

$$C_k(K_\varepsilon)=\begin{cases}C_k(K), & k\neq -1,\\ \mathbb{Z}, & k=-1,\end{cases}$$

$$\partial_k^{K_\varepsilon}=\begin{cases}\partial_k, & k\neq 0,\\ \varepsilon, & k=0.\end{cases}$$

由 K_ε 决定的同调群叫做 K 的约化同调群, 记为 $\tilde{H}_k(K), k\in\mathbb{Z}$.

15.10 命题 在有增广 ε 的链复形 K 的同调群和约化同调群间有关系

$$H_n(K)=\tilde{H}_k(K),\quad k\neq 0,$$

$$H_0(K)=\tilde{H}_0(K)\oplus\mathbb{Z}.$$

---

1) 当不强调 ε 时, K_ε 和 $\partial_k^{K_\varepsilon}$ 分别记为 $\tilde{K}$ 和 $\tilde{\partial}_k$.

证明 可以像单纯情形 (6.21) 那样证明. ◁

15.11 **定义** 设 $K_\varepsilon, L_{\varepsilon'}$ 分别是 K, L 的增广链复形. 链映射 $f = \{f_k : C_k(K) \to C_k(L)\}$ 称为保持增广，如果

$$\varepsilon' \circ f_0 = \varepsilon,$$

显然，保持增广的链映射导出约化同调群间的同态.

15.12 **定理** 非负链复形 K 是点状的，当且仅当存在增广同态 ε 使增广链复形 K_ε 为零调的.

证明 必要性.

命

$$\varepsilon : C_0(K) \to H_0(K) = \frac{C_0(K)}{\mathrm{Im}\partial_1}$$

为自然投射. 那么 ε 为满同态，$\mathrm{Ker}\varepsilon = \mathrm{Im}\partial_1$. 由于 $H_0(K) = \mathbb{Z}$. 因此这样定义的 ε 可以做为 K 的增广同态.

相应的增广链复形 K_ε, 其同调群可由 (15.10) 算出全为 0, 故 K_ε 为零调的.

充分性.

若有 ε 使 K_ε 为零调的，那么由 (15.10) 知 K 的同调群适合 (2), 故 K 为点状的.

¡ 单纯情形的 (6.20) 是本定理的特殊情况.

以后，称非负链复形为零调时，总暗指它有一个相应的增广 ε 存在.

以下是单纯情形的承载子概念 (7.18) 在 Comp 中的推广.

15.13 **定义** 设 K 为非负的自由链复形. $\sigma_1^k, \cdots, \sigma_{\varphi_k}^k$ 为 $C_k(K)$ 的基, $k \in \mathbb{Z}$. L 为链复形. K, L 间的一个 **承载子**C 是如下的一个对应：它对每个 σ_i^k, 对应有增广 ε 和 ε' 的 L 的一个以 ε' 的限制为增广的子链复形 [1] $C(\sigma_i^k)$, 使 σ_j^{k-1} 在 $\partial_k \sigma_i^k$ 中有

1) 子链复形的定义是显然的.

非零系数时，$C(\sigma_j^{k-1})$ 为 $C(\sigma_i^k)$ 的子链复形. 当每个 $C(\sigma_i^k)$ 都是零调时，称 C 为 **零调的承载子**.

15.14　定义　设 K,L,C 如上. 链映射 $f:K\to L$ 叫做是由 C 承载的. 如果 $f_k(\sigma_i^k)$ 为 $C(\sigma_i^k)$ 的链，链伦移由 C 承载的概念可类似定义.

有了以上的准备，我们可以陈述并证明以下的零调承载子定理，它是点状承载子定理 (7.19) 的代数形式.

15.15　定理　设 $K_\varepsilon, L_{\varepsilon'}$ 分别为链复形 K,L 的增广链复形. 又 K 为自由的且 C 为 K,L 间的一个零调承载子. 如果两个保持增广的链映射 $f=\{f_k:C_k(K)\to C_k(L)\}$ 和 $g=\{g_k:C_k(K)\to C_k(L)\}$ 均由 C 承载，那么它们是链同伦的，而且连接它们的链伦移 $D:f\simeq g$ 也由 C 承载.

证明　我们要在如下的图表

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\to & C_{k+1}(K) & \to & C_k(K) & \to\cdots\to & & \\
 & \downarrow & D_k\swarrow & f_k\downarrow g_k & & & \\
\cdots\to & C_{k+1}(L) & \to & C_k(L) & \to\cdots\to & & \\
 & C_1(K) & \to & C_0(K) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \to 0\\
 & f_1\downarrow g_1 & D_0\swarrow & f_0\downarrow g_0 & & \| & \\
 & C_1(L) & \to & C_0(L) & \xrightarrow{\varepsilon'} & \mathbb{Z} & \to 0
\end{array}$$

中，定义出

$$D_k:C_k(K)\to C_{k+1}(L),\quad k=0,1,\cdots,$$

使

$$\partial_{k+1}D_k=f_k-g_k-D_{k-1}\partial_k.$$

注意，按假定，K 是自由的，C 是零调承载子. 于是 $C_k(K)$ 有基 $\sigma_1^k,\cdots,\sigma_{\varphi_k}^k$，而 C 使 $C(\sigma_i^k)$ 为 L 的子链复形，并且是零调的.

我们归纳地来构做 D_k.

$k=0$. 这时只要定义 $D_0:C_0(K)\to C_1(L)$ 使

$$\partial_1 D_0=f_0-g_0.$$

也就是说，对 σ_i^0, 只要证明 $f_0(\sigma_i^0)-g_0(\sigma_i^0)$ 有在 ∂_1 下的原象就可以了．一般而言，找原象当然很困难，可是由于 f_0 和 g_0 均由 C 承载，所以 $f_0(\sigma_i^0)$ 和 $g_0(\sigma_i^0)$ 都是 $C(\sigma_i^0)$ 的链，因此如果能为 $f_0(\sigma_i^0)-g_0(\sigma_i^0)$ 在 $C(\sigma_i^0)$ 中找一个原象，问题也解决了．可是 C 是零调承载子，即 $C(\sigma_i^0)$ 为零调的．因此 $f_0(\sigma_i^0)-g_0(\sigma_i^0)$ 在 $C(\sigma_i^0)$ 中有无原象，等价于 $f_0(\sigma_i^0)-g_0(\sigma_i^0)$ 是否属于 $\mathrm{Ker}\varepsilon'$．现在按假定，f,g 是保持增广的，于是

$$\varepsilon'(f_0(\sigma_i^0)-g_0(\sigma_i^0))=\varepsilon(\sigma_i^0)-\varepsilon(\sigma_i^0)=0.$$

这样，$f_0(\sigma_i^0)-g_0(\sigma_i^0)$ 在 $C(\sigma_i^0)$ 中有原象 c_1, 可 $C(\sigma_i^0)$ 为 L 的子链复形．因此可命 $D_0(\sigma_i^0)=c_1\in C_1(L)$. D_0 造好．

假定 $q<k$ 时，$D_q:C_q(K)\to C_{q+1}(L)$ 已经造好，满足

1) D_q 由 C 承载，

2) $\partial_{q+1}D_q=f_q-g_q-D_{q-1}\partial_q$.

现在来定义

$$D_k:C_k(K)\to C_{k+1}(L)$$

具有相应的性质 1) 和 2).

对 $C_k(K)$ 的基元 σ_i^k, 按假定 $f_k(\sigma_i^k)$ 和 $g_k(\sigma_i^k)$ 都是 $C(\sigma_i^k)$ 的链，又 $D_{k-1}(\partial_k\sigma_i^k)$ 按归纳假定也是 $C(\sigma_i^k)$ 的链．现在考虑 $C(\sigma_i^k)$ 的链

$$f_k(\sigma_i^k)-g_k(\sigma_i^k)-D_{k-1}(\partial_k\sigma_i^k). \tag{3}$$

如果它在 ∂_{k+1} 下有原象，那么这个原象就可作为 $D_k(\sigma_i^k)$.

为了证明它有原象，利用 $C(\sigma_i^k)$ 为零调的，只要证明它是闭的即可，即，我们要证明

$$\partial_k(f_k(\sigma_i^k)-g_k(\sigma_i^k)-D_{k-1}\partial_k\sigma_i^k)=0.$$

但这由 f,g 为链映射及 D_{k-1} 适合归纳条件 2), 得

$$\partial_k(f_k(\sigma_i^k)-g_k(\sigma_i^k)-D_{k-1}\partial_k\sigma_i^k)=f_{k-1}\partial_k\sigma_i^k-g_{k-1}\partial_k\sigma_i^k$$

$$-(f_{k-1}-g_{k-1}-D_{k-2}\partial_{k-1})(\partial_k\sigma_i^k)=0.$$

所以 (3) 是 $C(\sigma_i^k)$ 中的闭链，因此它在 ∂_{k+1} 下有原象 c_i^{k+1}. 现在将 c_i^{k+1} 视为 L 的链，并命

$$D_k(\sigma_i^k)=c_i^{k+1},$$

那么 D_k 的归纳构作便完成. 定理得证. ◁

¡ 1) 我们也可以用 $f_{0*}=g_{0*}$ 来代替 f,g 均保持增广这个条件.

2) (15.15) 似乎只是 (7.19) 的代数翻版，没有多大意思. 可实际上，它反应了 (7.19) 的代数本质，所以应用很广，下面就是一例.

15.16 定理 由复形 K 定义的两种同调群 $H_k(K)$ 和 $H_k(K_0)$ 一致，这里 K_0 是由 K 决定的有序链复形 (参见 15.5).

证明 对复形 K 的顶点给一个序. 下面我们定义两个保持增广的链映射

$$\alpha: C_k(K)\to C_k(K_0)$$

和

$$\beta: C_k(K_0)\to C_k(K).$$

设 $\sigma^k=+(a_0a_1\cdots a_k)$ 为 $C_k(K)$ 的基本组的元，这里 $a_0,a_1,\cdots,a_k$ 按上述序排列，命

$$\alpha(\sigma^k)=\langle a_0a_1\cdots a_k\rangle.$$

显然，它是一个链映射. 如果命 $\varepsilon': C_0(K_0)\to\mathbb{Z}$ 为 $\varepsilon'\langle v\rangle=1$. 那么 ε' 为 K_0 的增广，而且 α 保持增广.

再定义 $\beta: C_k(K_0) \to C_k(K)$ 为

$$\beta\langle v_0v_1\cdots v_k\rangle = \begin{cases} (v_0v_1\cdots v_k), & v_i \neq v_j, \text{当 } i \neq j, \\ 0, & \text{有 } i \neq j \text{ 使 } v_i = v_j. \end{cases}$$

那么 β 显然也是一个保持增广的链映射.

现在我们来证明 $\beta \circ \alpha = id_{C_*(K)}$.

实际上，对 $C_k(K)$ 的基元 $\sigma_i^k = +(a_0a_1\cdots a_k)$, 按定义

$$\beta \circ \alpha(\sigma_i^k) = \beta(\langle a_0a_1\cdots a_k\rangle) = (a_0a_1\cdots a_k).$$

所以得证.

再来证 $\alpha \circ \beta \simeq id_{C_*(K_0)} : C_*(K_0) \to C_*(K_0)$.

为此只要找到同时承载 $\alpha \circ \beta$ 和 $id_{C_*(K_0)}$ 的一个零调承载子 C 就可以了.

对 $C_k(K_0)$ 的基元 $\langle v_0v_1\cdots v_k\rangle$. 假定 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ 中不同的为 $a_0, a_1, \cdots, a_l$. 于是 $A = (a_0a_1\cdots a_l)$ 为 K 的一个单形. 规定 $C(\langle v_0v_1\cdots v_k\rangle)$ 为 $C_*(K_0)$ 的子链复形 $C_*(A_0)$. 那么可以象 (6.13) 计算锥形的同调群那样，证明 $C_*(A_0)$ 为零调的. 至于这样定义的零调承载子 C, 承载 $\alpha \circ \beta$ 和 $id_{C_*(K_0)}$ 是显然的. 于是 $\alpha \circ \beta \simeq id_{C_*(K_0)}$.

这样，α_*(和 β_* 都) 是同构. 定理得证. ◁

¡ 复形 K 的同调群，现在可以用 $H_k(K)$ 定义，也可以用 $H_k(K_0)$ 定义. 有序链复形 K_0 的链群 $C_k(K_0)$ 是由 $\langle v_0v_1\cdots v_k\rangle$ 生成的. 如果我们用 $\triangle_k$ 表示一个固定的 k 维单形及其面所决定的 k 维复形，那么 $\langle v_0v_1\cdots v_k\rangle$ 可以恒同为 $\triangle_k \to K$ 的单纯映射. 采用这种看法，$C_k(K_0)$ 就是由 $\triangle_k$ 到 K 的全体单纯映射生成的一个自由群. 而 $\partial_k\langle v_0v_1\cdots v_k\rangle$ 就是将映射 $\langle v_0v_1\cdots v_k\rangle$ 限制在 $\triangle_k$ 的相应面上的 $\langle v_0\cdots \hat{v}_i\cdots v_k\rangle$ 的交错和.

定理(15.15) 以后还将多次用到. 尤其是它在 L 为点状时的特例：若 K 为自由链复形，L 为点状链复形，那么任意两个保持增

广的链映射 $f=\{f_k:C_k(K)\to C_k(L)\}$ 和 $g=\{g_k:C_k(K)\to C_k(L)\}$ 一定链同伦.

现在转向正合同调序列的建立.

15.17 定义 称链映射构成的序列

$$0\to C'\xrightarrow{f}C\xrightarrow{g}C''\to 0 \tag{4}$$

为 **正合的**, 如果对每个 k, 序列

$$0\to C'_k\xrightarrow{f_k}C_k\xrightarrow{g_k}C''_k\to 0$$

为正合的.

对正合的序列 (4), 可以利用 "下台阶" 的办法, 得到

$$\triangle_k:H_k(C'')\to H_{k-1}(C')$$

(参见 (10.14) 末尾). 以后称它为由 (4) 决定的 **边界连接同态**.

15.18 定理 若 (4) 为正合的, 那么它导出以下的长正合序列

$$\cdots\to H_k(C')\xrightarrow{f_*}H_k(C)\xrightarrow{g_*}H_k(C'')\xrightarrow{\triangle_k}H_{k-1}(C')\to\cdots,$$

称为由 (4) 导出的正合同调序列.

证明 可以像 (10.15) 的证明那样来进行. ◁

¡ 定理中的 f,g 如果都是保持增广的, 那么长正合序列换为约化同调群仍对.

利用函子 $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Z})$, 我们就可以讨论上同调的情形. 相应的结果我们就不详细写出了.

第五章 连续同调论

我们知道, 拓扑学的目的是寻求拓扑不变量, 从而使许多数学问题的解决成为可能. 而如何寻求拓扑不变量呢? 在同调论中, 我们的出发点是: 边界关系为拓扑不变的. 单纯同调论已就可剖分空间的情形, 完全实践了这一点; 但对一般的空间, 应该如何进行呢? 温故而知新, 我们先来回顾一下可剖分空间上的同调群是如何建立的.

首先, 我们借助可剖分空间具有剖分, 而得到各个维数的单形, 给单形以定向, 我们获得基本组和各个维数的链群. (如前所述, "链" 表达的就是可剖分空间中的几何 "图形"). 相邻维数的链群之间有边缘同态 (如前所述, 这是几何上取 "边界" 的代数形式) 将它们联系起来. 通过边缘同态的核和像, 我们就得到同调群: 反映可剖分空间上有可能成为边、但又不真是边的量. 所以整个过程是边界关系在起作用, 而单形只是中间步骤. 使用它们, 仅仅是因为相邻维数的单形之间, 其边界关系非常明确. 所以要想对一般的空间定义同调群, 其原则 —— 边界关系是拓扑不变的 —— 虽然仍可用, 可没有剖分, 没有定向单形, 它们的边界关系也就不好说了. 因此, 应该为定向单形 (组成 "图形" 的 "砖瓦") 找到一个合适的替代物.

为了找到合适的替代物, 我们来考察复形 K, L 间的映射 $\varphi: K \to L$ 是如何导出同调群间的同态 $\varphi_*: H_n(K) \to H_n(L)$ 的. 这个 φ_* 来之不易. 因为只有 K, L 间的单纯映射 $f: K \to L$ 才能通过它所导出的链映射 $f_\#: C_n(K) \to C_n(L)$ 得到同调群间的同态. 而映射 φ 并不能导出链映射 $\varphi_\#: C_n(K) \to C_n(L)$, 因为 φ 并不将 K 的单形 A 变为 L 的单形, 所以 $\varphi_\#(\sigma)$[1] 在 $C_n(L)$

1) σ 表示给 A 以定向后所得的定向单形.

中无意义. 为了使 $\varphi_{\#}(\sigma)$ 在 $C_n(L)$ 中有意义, 我们需要 φ 的单纯逼近 f, 有了 f, $f_{\#}(\sigma)$ 才在 $C_n(L)$ 中有意义. 当然, 由于单纯逼近 f 不唯一. 所以为了保证在同调群上导出同一同态, 还得证明, φ 的不同单纯逼近所导出的链映射, 彼此是链同伦的. 还有, 映射 $\varphi: K \to L$, 一般而言, 并不存在单纯逼近. 所以我们还需借助于重心重分. 总之, 由于 $\varphi_{\#}(\sigma)$ 在 $C_n(L)$ 中无意义, 从而引发出一连串问题要去解决. 当然, 我们在上一章里面, 已经很好的解决了这些问题. 但是否有别的解决方法呢? 例如, 扩大 $C_n(L)$ 的意义, 让它包含有 $\varphi_{\#}(\sigma)$ 这种元素.

这么考虑至少有两点理由: (1) A 是"平直"的单形, σ 是"平直"的定向单形, 而 $\varphi_{\#}(\sigma)$ 无非是"曲"的定向单形而已, 从拓扑的角度看, "平直"的和"曲"的, 没有差别, 它们理应受到同等的对待. (2) φ 和其单纯逼近 f 同伦, 所以 $\varphi_* = f_*$ (9.6) 故从同调的角度看, $\varphi_{\#}(\sigma)$ 和 $f_{\#}(\sigma)$"一样".

当然, 如果采取这种作法, 也有一系列的问题要去解决, 例如, 对这种新元素, 其定向如何确定, 其边界如何定义等等. 但作为一种方向, 值得一试. 实际上, 在数学 (和其它科学) 里, 由于新事物的不断出现, 我们的研究对象、认识也随之扩大和深入. 拒绝新事物, 只能导致落后, 停步不前. 虚数的出现就是如此. 一开始, 人们局限于实数范围, 很多问题解决不了, 说不清楚, 如方程有时有解, 有时没解; 负数不能开方等等. 可是一引进虚单位 $\sqrt{-1}$, 这些问题都可以迎刃而解. 但这有悖于传统的实数的平方 ≥ 0 的思想, 因此, 虽然人们早就知道 $\sqrt{-1}$, 可它仍遭十七、八世纪的许多数学家的怀疑. 将 $\sqrt{-1}$ 称为"虚"单位, 就可见当时的怀疑程度. 但由于后世对 $\sqrt{-1}$ 研究的更深入、细致. 它的几何解释也被发现, 最终人们还是接受了它. 实际上, 在某种意义下, 复数比实数更重要. 因此, 面对客观实际, 按客观现实开展我们的工作, 必要时, 不惜从根本上予以改变, 对于数学研究也是规律性的东西.

如果按上面所说的, 将 $C_n(L)$ 予以扩大, 把 $\varphi_{\#}(\sigma)$ 包括进

来，那么由于 φ 为单纯映射 f 时， $f_\#(\sigma)$ 是 $C_n(L)$ 的基本组的一元，因此 $C_n(L)$ 的生成元，将由原先的基本组扩大为全体 $\varphi_\#(\sigma)$. 亦即， $C_n(L)$ 的基本组原先由定向单形组成，现在应换为由 $\varphi_\#(\sigma)$ 组成. 这时，它的确切意思是什么？因为这里的 σ 是 K 的定向单形. 而一般来讲，新、老意义下的链群，它们都应完全只由 L 本身决定，而和 K 无关. 怎样摆脱 σ 来自 K 这一点呢？其实，若 σ_1 和 σ_2 为 K 的基本组中两个不同的定向单形，那么 $\varphi_\#(\sigma_1)$ 和 $\varphi_\#(\sigma_2)$ 在 $C_n(L)$ 中当然不同，它们分别是 φ 限制在 σ_1 和 σ_2 上的产物. 可我们也可将 $\sigma_1(\sigma_2)$ 视为 (线性) 映射：它的定义域是一个"固定"的定向单形 $\triangle_n$，而象就是 $\sigma_1(\sigma_2)$. 采取这种看法， $\varphi_\#(\sigma_1)$ 和 $\varphi_\#(\sigma_2)$ 就都是定义在 $\triangle_n$ 上的映射. 只不过，一个是先 σ_1 后 φ，另一个是先 σ_2 后 φ. 但总之都是定义在 $\triangle_n$ 上，值在 L 中的映射. 因此直接将 $C_n(L)$ 的基本组定义为由全体 $\psi_\#(\triangle_n)$ 组成，这里 $\triangle_n$ 为一固定单形，而 ψ 为定义在 $\triangle_n$ 上、值取在 L 中的映射，那么，链群 (新意义下的) 就和 K 无关，而完全由 L 本身决定. 和单纯的情形一样，如果改变 $\triangle_n$ 的定向，而 φ 不变，那么这新的 $\varphi_\#(-\triangle_n)$ 就应该看做是和 $\varphi_\#(\sigma)$ 定向相反的元，记为 $-\varphi_\#(\triangle_n)$.

和单纯的情形不同，这时， $\varphi_\#(\triangle_n)$ 可能和 $-\varphi_\#(\triangle_n)$ 相等，即 $\triangle_n$ 有一个改变定向的线性变换， l，而 $\varphi(l(x))=\varphi(x)$. 因此，由 $\varphi_\#(\triangle_n)$ 生成的新链群不自由. 而不自由的群，使用起来非常不便，因此，对于这种新的链群，我们不考虑 $\triangle_n$ 的"定向"，而直接规定它由 $\varphi_\#(\triangle_n)$ 生成.[1)]

有了链，它的边缘也就好定义，实际上， $\varphi_\#(\triangle_n)$ 的边界，当然就是 φ 在 $\triangle_n$ 的"边界"上的限制. 这样定义边缘，当然连续作用两次为 0. 于是就可以定义反映"有可能成为边、又不真是边"的同调群了.

1) 试与 (15.17) 前 ¡ 中关于 K_0 的解释比较.

下面就是按照这种想法，得到一般空间的同调群.

§16. 连续链复形、连续同调群

如上所述，本节的定义和结论都是按照单纯同调论的模式，对一般空间复述一遍.

以 E^{n+1} 表示 $(n+1)$ 维欧氏空间，$x(\in E^{n+1})$ 的坐标为 $(x_0,x_1,\cdots,x_n)$.

16.1 定义 E^{n+1} 中的子集 $\triangle_n=\{x|\in E^{n+1},x_i\geq 0,\sum\limits_{i=0}^{n}x_i=1\}$ 叫做是 **标准 n 单形.**

于是 $\triangle_n$ 完全由顶点

$$e_n^j=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{(j+1)\text{ 个}},0,\cdots,0)\in\triangle_n,\quad j=0,1,\cdots,n,$$

决定.

显然，$\triangle_0$ 为 E^1 中的一个点 $e_0^0=(1)$; $\triangle_1$ 为 E^2 中的线段 (e_1^0,e_1^1); $\triangle_2$ 为 E^3 中的三角形 (e_2^0,e_2^1,e_2^2); 一般 $\triangle_n$ 为 E^{n+1} 中的高维类似物.

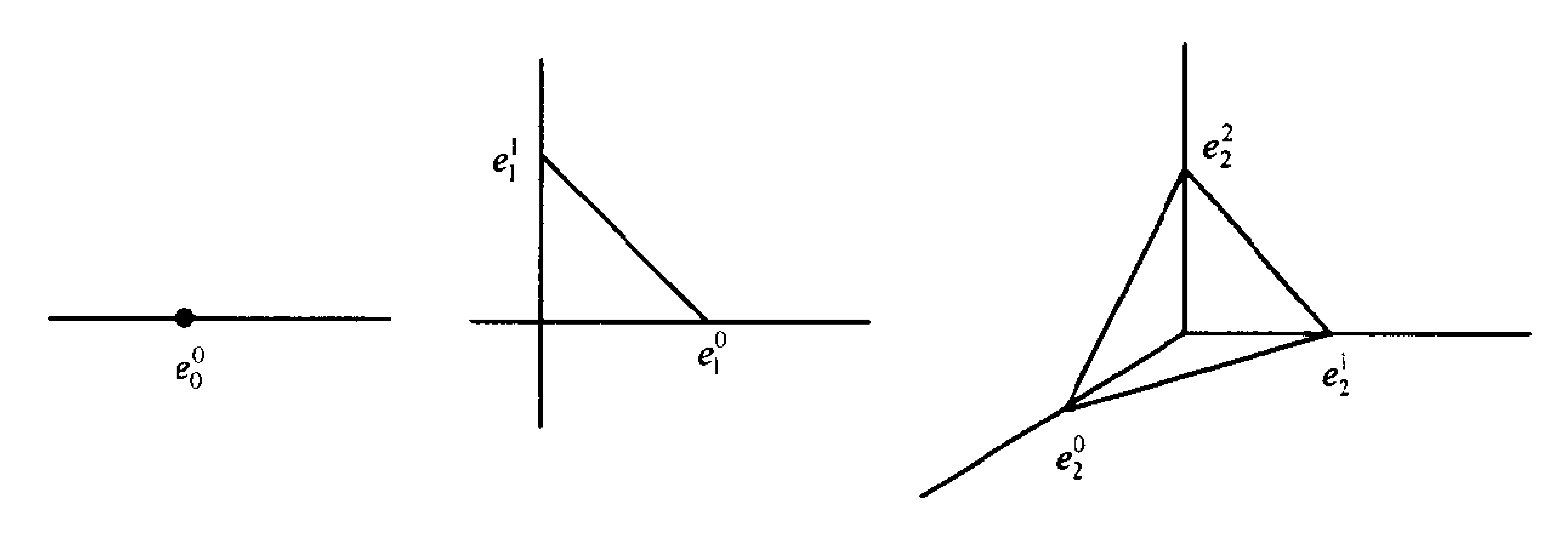


图 5.1

16.2　定义　空间 X 的一个 **连续 n单形** 是一个映射

$$\sigma = \sigma_n : \triangle_n \to X, \quad n \geq 0.$$

¡　连续 n 单形是映射，不是 $\triangle_n$ 在 σ 下的象或别的什么．但连续 0 单形是映射

$$\sigma : \triangle_0 \to X.$$

因此不妨将它和 $\sigma(\triangle_0) \in X$ 等同起来．于是 X 的连续 0 单形就是 X 的点．而连续 1 单形是映射

$$\sigma_1 : \triangle_1 = (e_1^0, e_1^1) \to X,$$

也即 X 中的道路，其始点为 $\sigma_1(e_1^0)$，终点为 $\sigma_1(e_1^1)$．

由 X 的所有连续 n 单形所生成的自由可换群，叫做 X 的 n 维**连续链群**，记为 $S_n(X)$．它的元称为 X 的**连续 n链**．因此连续 n 链均呈 $\sum\limits_{\sigma_n} c_{\sigma_n} \cdot \sigma_n$ 形，其中 $c_{\sigma_n} \in \mathbb{Z}$，和为有限和．对 $n < 0$，命 $S_n(X) = 0$．

¡　空间 X 的 n 维连续链群 $S_n(X)$，显然是拓扑不变的．但它一方面太大，另一方面也不好掌握，因此我们还得另找其他的拓扑不变量．

16.3　定义　空间 X 的连续 n 单形 **σ的承载集** 是指 $\triangle_n$ 在 σ 下的象集，记为 $|\sigma|$．连续 n 链 $\sum\limits_{\sigma_n} c_{\sigma_n} \cdot \sigma_n$ **的承载集** 指 $\bigcup\limits_{\sigma_n} |\sigma_n|$．

¡　不同的 σ 可以有相同的承载集 $|\sigma|$．又 σ 可视为 $S_n(Y)$ 的元，只要 $|\sigma| \subset Y$．

16.4　定义　欧氏空间中的凸集 C 的连续 n 单形 $\sigma : \triangle_n \to C$，叫做是线性的，如果由 $\alpha_i \in \triangle_n, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$，可以推出 $\sigma(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = \lambda_1\sigma(\alpha_1) + \lambda_2\sigma(\alpha_2)$．

显然，线性连续 n 单形的全体生成 $S_n(C)$ 的一个子群，记为 $L_n(C)$．

又，线性连续 n 单形 σ 完全由它在 $\triangle_n$ 的顶点 $e_n^0,\cdots,e_n^n$ 上的值 $\sigma(e_n^0)=v^0,\cdots,\sigma(e_0^n)=v^n$ 所决定. 因此以后用 $(v^0,\cdots,v^n)$ 来表示 σ. $b_\sigma=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{n+1}v^i$ 叫做 $\sigma=(v^0,\cdots,v^n)$ 的重心.

¡ 线性连续 n 单形 σ 用 $(v^0,\cdots,v^n)$ 来表示时，$v^0,\cdots,v^n$ 的次序不能排错.

16.5 例 标准 n 单形 $\triangle_n$ 是凸集，因此有如下的一组线性连续 $(n-1)$ 单形 $F_n^j=(e_n^0,\cdots,\hat{e}_n^j,\cdots,e_n^n):\triangle_{n-1}\to\triangle_n, j=0,1,\cdots,n$. 以后称 F_n^j 为第 j 个 **面运算**. $|F_n^j|$ 叫做 $\triangle_n$ 的第 j 个 **面**.

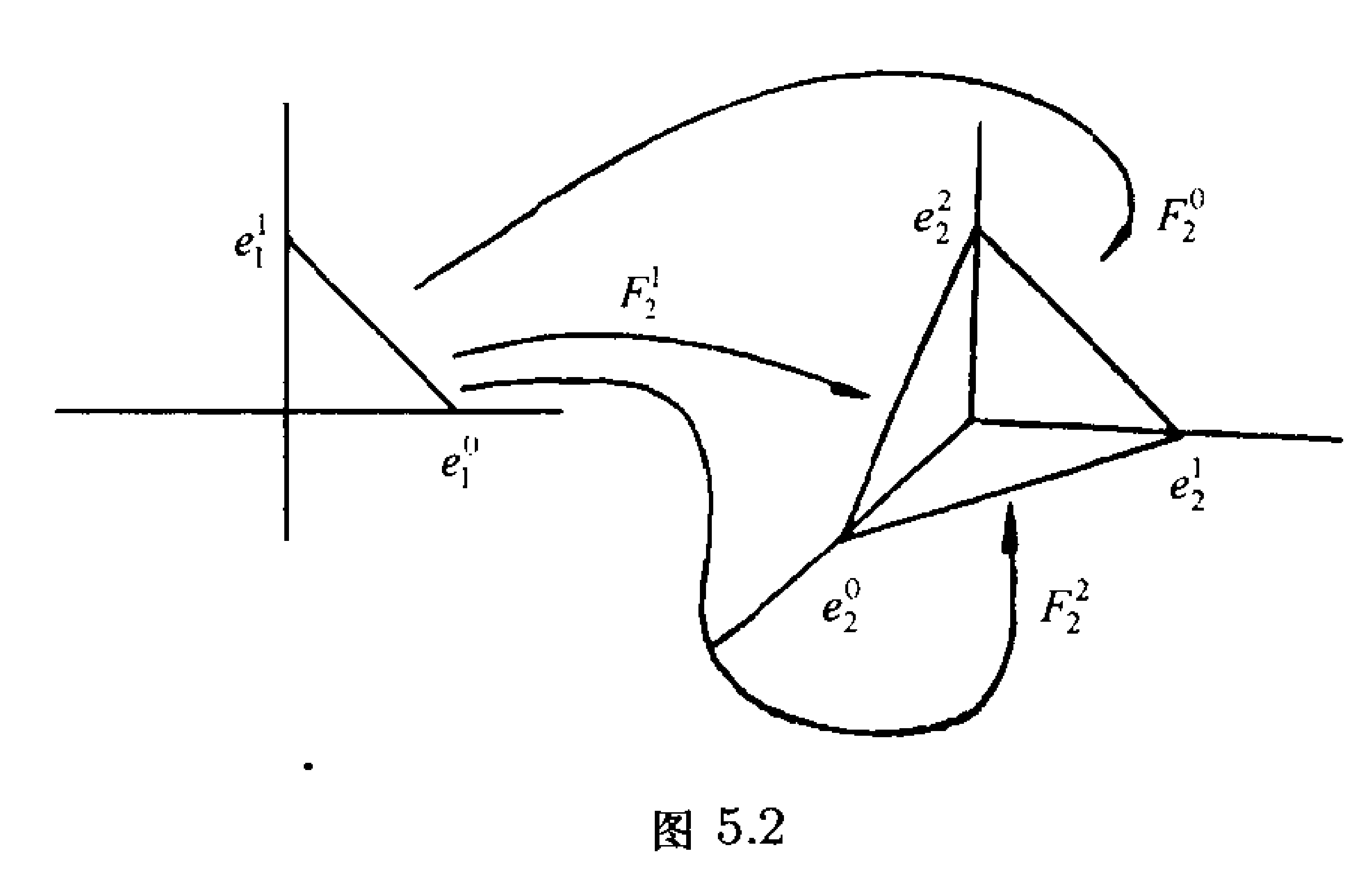


图 5.2

16.6 命题 对于面运算，有以下关系

$$F_{n+1}^jF_n^k=F_{n+1}^kF_n^{j-1}:\triangle_{n-1}\to\triangle_{n+1},\quad k<j.$$

证明 直接验算即知. ◁

16.7 定义 在空间 X 的两个相邻的连续链群之间，可以定义边缘同态

$$\partial_n:\ S_n(X)\to S_{n-1}(X)$$

$$\sigma_n\mapsto\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_n\circ F_n^i, & n>0,\\ 0, & n\leqslant 0.\end{cases}$$

在不致引起混淆的场合，也将 ∂_n 略为 ∂.

对于空间 X 的 0 维连续链群 $S_0(X)$, 除边缘同态 $\partial_0 = 0$ 外，和单纯的情形一样，还有另一个称为增广的同态

$$\varepsilon: \ S_0(X) \to \mathbb{Z}$$

$$\sigma_0 \mapsto 1.$$

有时为了强调上述增广是对 X 定义的，记为 ε^X.

16.8　定义　若 b 为凸集 C 的一个点, $\sigma = (v^0, \cdots, v^n)$ 为线性连续 n 单形, 那么用 $b\sigma$ 表示线性连续 $(n+1)$ 单形 $(b, v^0, \cdots, v^n)$. 线性的扩充这个过程，我们有同态

$$b: L_n(C) \to L_{n+1}(C),$$

称它为凸集 C 上的、以 b 为顶点的锥同态，简称为 **锥同态**.

16.9　命题　对于锥同态 b, 我们有

$$\partial(bl) = \begin{cases} l - b(\partial l), & l \in L_n(C), n > 0, \\ l - \varepsilon(l)b, & l \in L_0(C). \end{cases} \tag{1}$$

证明　直接验证即知. $\lhd$

16.10　定义　对于 $L_n(C)(\subset S_n(C))$ 中的元 $\sigma = (v^0, \cdots, v^n): \Delta_n \to C$, 定义 $L_{n+1}(C \times I)$ 中的元

$$D_n\sigma = D_n(v^0, \cdots, v^n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(v_0, \cdots, v_i, v_i', \cdots, v_n'),$$

其中 $v_i = v^i \times 0, v_i' = v^i \times 1, i = 0, 1, \cdots, n$, 叫做 σ 上的 **代数柱形**. 当 $\sigma = \iota_n = (e_n^0, \cdots, e_n^n), n = 1, 2$ 时，它的几何形象可以参见图 5.3.

代数柱形可线性扩充为同态

$$D_n: L_n(C) \to L_{n+1}(C \times I).$$

当 $l = \sum_i c_i(v_{(i)}^0, \cdots, v_{(i)}^n)$ 时，我们有

$$\partial Dl = l_1 - l_0 - D\partial l, \tag{2}$$

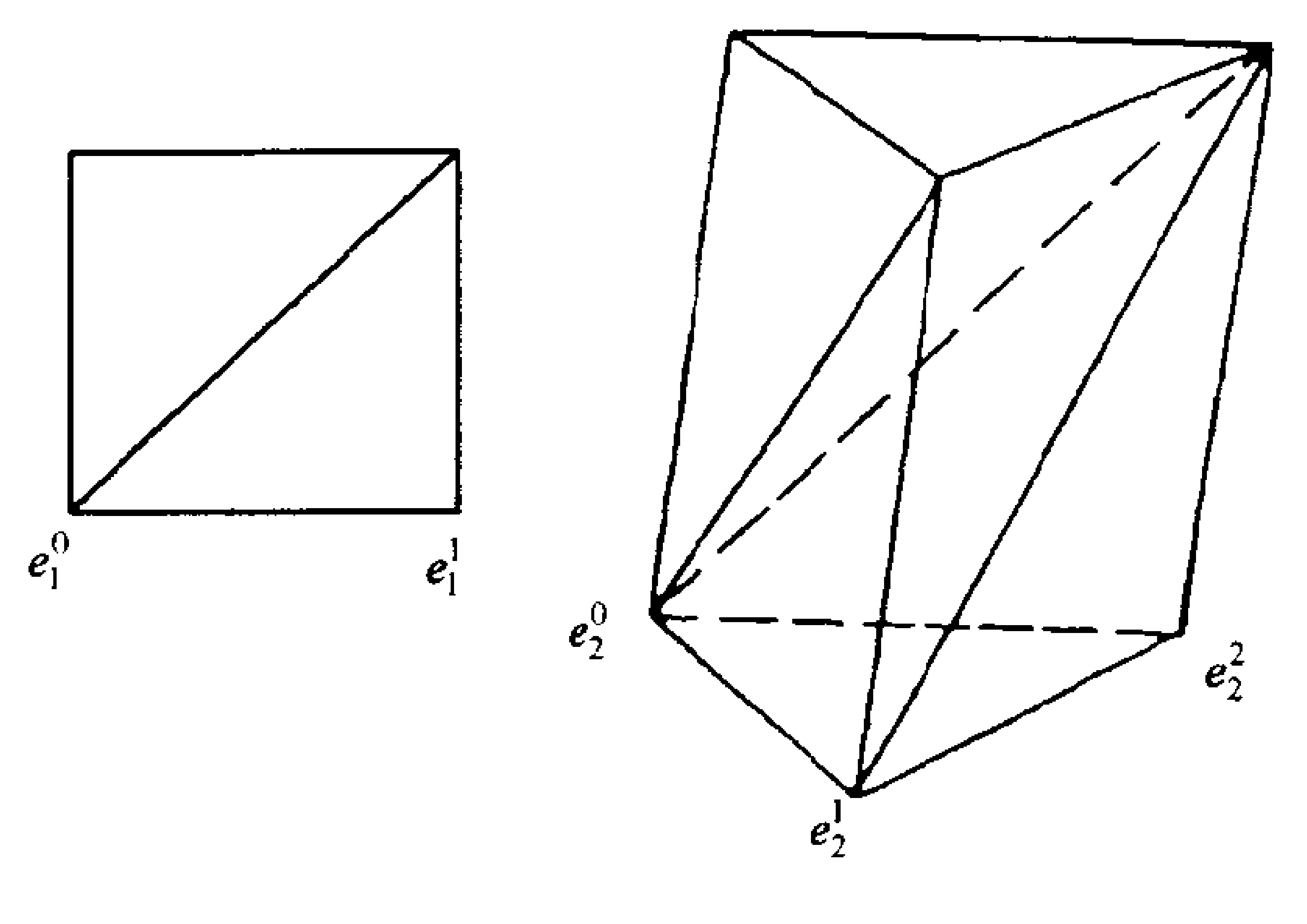


图 5.3

其中 $l_1=\sum_i c_i(v_0^{(i)\prime},\cdots,v_n^{(i)\prime}), l_0=\sum_i c_i(v_0^{(i)},\cdots,v_n^{(i)})$.

16.11　引理　对于边缘同态和增广，我们有关系

$$\partial_{n-1}\partial_n=0,\quad \varepsilon\partial_1=0,\quad n>1.$$

证明　只要对连续 n 单形 σ 验证即可.

$$\begin{aligned}
\partial\partial\sigma &= \partial\left(\sum_i(-1)^i\sigma F^i\right)=\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\sigma F^iF^j\\
&=\sum_{i>j}(-1)^{i+j}\sigma F^iF^j+\sum_{i\le j}(-1)^{i+j}\sigma F^iF^j\\
&=\sum_{i>j}(-1)^{i+j}\sigma F^jF^{i-1}+\sum_{i\le j}(-1)^{i+j}\sigma F^iF^j\\
&=\sum_{i-1\ge j}(-1)^{i+j}\sigma F^jF^{i-1}+\sum_{i\le j}(-1)^{i+j}\sigma F^iF^j\\
&=\sum_{i\ge j}(-1)^{i+1+j}\sigma F^jF^i+\sum_{i\le j}(-1)^{i+j}\sigma F^iF^j\\
&=\sum_{i\le j}(-1)^{i+1+j}\sigma F^iF^j+\sum_{i\le j}(-1)^{i+j}\sigma F^iF^j\\
&=0.
\end{aligned}$$

由 (10.6)

$$\varepsilon\partial_1\sigma = \varepsilon(\sigma(e_1^0) - \sigma(e_1^1)) = 0.$$

所以引理得证. ◁

16.12 定义 空间 X 的 **连续链复形** $S(X) = \{S_n(X), \partial_n\}$. X 的 n 维 **连续闭链群** $Z_n(X)$ **和连续边缘链群** $B_n(X)$ 依次为 Ker ∂_n 和 Im ∂_{n+1}; 它们的元分别称为 **闭链** 和 **边缘链**.

由 (16.11), 知 $Z_n(X) = \text{Ker } \partial_n \supset \text{Im}\partial_{n+1} = B_n(X)$.

16.13 定义 商群

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = \text{Ker } \partial_n/\text{Im}\partial_{n+1}$$

叫做空间 X 的 n 维 **连续同调群**. 它的元叫做空间 X 的 n 维 **连续同调类**. 同一同调类中的连续闭链称为 **同调的**. 同调关系用 "$\sim$" 表示.

¡ 限于多面体时, 单纯同调群是否和连续同调群一致的问题, 我们留待以后来讨论.

16.14 定义 作为链复形的连续链复形 $S(X)$, 对增广同态 (16.7) 有 **增广 (连续) 链复形** $\tilde{S}(X) = \{\tilde{C}_k(X), \tilde{\partial}_k\}$ 及 **约化连续同调群**

$$\tilde{H}_n(X) = \text{Ker } \tilde{\partial}_n/\text{Im } \tilde{\partial}_{n+1}.$$

以上介绍了连续同调群, 下面再介绍映射如何导出同调群间的同态.

设 $f: X \to Y$ 是空间 X 到空间 Y 的一个映射. 那么 f 决定同态

$$S_n(f): \ S_n(X) \to S_n(Y)$$

$$\sigma \mapsto f \circ \sigma.$$

特别, 连续 n 单形 $\sigma: \triangle_n \to X$ 导出 $S_n(\sigma): S_n(\triangle_n) \to S_n(X)$. 而 $S_n(\sigma)(\iota_n) = \sigma$, 这里 $\iota_n \in S_n(\triangle_n)$ 是由恒同映射 $id: \triangle_n \to \triangle_n$ 所决定的元.

16.15　命题　上述由 f 所决定的同态和边缘同态间有关系

$$\partial_n \cdot S_n(f) = S_{n-1}(f) \cdot \partial_n, \tag{3}$$

又

$$\tilde{\partial}_n S_n(f) = S_{n-1}(f)\tilde{\partial}_n.$$

此外，当 $f = 1$(恒同映射) 时，$S_n(f)$ 为恒同同态. 若除 f 外，还有映射 $g : Y \to Z$, 那么

$$S_n(g \circ f) = S_n(g) \circ S_n(f).$$

证明　后两个断言是显然的. 而前两个断言，只要对连续单形 $\sigma \in S_n(X)$ 来验证即可. 但这由定义即知.　◁

由此知 f 所导出的 $S_n(f)$ 是保持增广的链映射. 因此，$S_n(f)$ 导出同态

$$f_{n_*} : H_n(X) \to H_n(Y),$$

$$f_{n_*} : \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y).$$

16.16　命题　上述由映射所导出的连续同调群间的同态，具有以下的性质：

(i) $1_* = 1 : H_n(X) \to H_n(X)$;

(ii) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

证明　这由 (16.15) 的后两个断言即知.　◁

¡　在单纯同调论中，为了从映射过渡到同调群间的同态，需要做很多准备工作. 可在连续同调论中，这一点变得轻而易举. 另外，在单纯同调论中，从映射到同态这种过渡的函子性 (即上述命题中的 (i) 和 (ii))，证明也不容易；可现在证明也不困难.

16.17　推论　(连续同调群的拓扑不变性) 若 $t : X \to Y$ 为拓扑映射，那么

$$t_{n_*} : H_n(X) \to H_n(Y), \quad n \in \mathbb{Z}$$

和

$$t_{n_*}:\tilde{H}_n(X)\to\tilde{H}_n(Y),\quad n\in\mathbb{Z}$$

均为同构.

证明 设 $t':Y\to X$ 为 t 的逆映射, 那么有

$$t't=1:X\to X,$$

$$tt'=1:Y\to Y.$$

由 (16.16) 中的 (i), 有

$$(t't)_*=1_*=1,$$

$$(tt')_*=1_*=1,$$

又由 (16.16) 中的 (ii), 有

$$(t't)_*=t'_*\circ t_*,$$

$$(tt')_*=t_*\circ t'_*.$$

因此同态 t'_* 为 t_* 的逆, 故 t_* 为同构. ◁

至此, 我们完全解决了连续同调群的拓扑不变性问题. 但是连续同调群的同伦不变性问题, 我们留到下一节去讨论.

下面介绍几个有关连续同调群的结构的定理.

16.18 定理 设空间 X 的道路连通分量为 $\{X_k\}_{k\in\Gamma}$. 那么

$$H_n(X)=\sum_{k\in\Gamma}H_n(X_k).$$

证明 这时

$$S_n(X)=\sum_k S_n(X_k),$$

又

$$\partial_n|S_n(X_k):S_n(X_k)\to S_{n-1}(X_k),$$

因此结论可像 (3.12) 那样推导出来. 故略. ◁

16.19 定理 如果空间 X 是道路连通的，那么

$$H_0(X) = \mathbb{Z}.$$

证明 在 (16.2) 后已经说明，$S_0(X)$ 和 $S_1(X)$ 可以分别看作是由 X 的点和道路所生成的自由可换群. 于是问题变成证明：X 中的任意一点 x 均可用一条道路和一个固定点 x_0 相连. 但这一事实，由于 X 是道路连通的，所以显然成立. 故定理得证. ◁

由 (15.10) 知约化同调群和同调群间有如下的关系.

16.20 定理 对于空间 X 来讲，有

$$H_n(X) = \begin{cases} \tilde{H}_n(x), & n > 0, \\ \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}, & n = 0. \end{cases}$$

以上介绍的是空间的连续同调群，以及映射导出的同调群间的同态. 利用对偶手法，我们就可以得到连续上同调群，以及由映射导出的上同调群间的同态，不过，这时的“方向”相反. 上同调群的拓扑不变性和它的结构定理均不难得到，细节我们就不详细写出. 下面只指出一些要注意的地方.

空间 X 的约化同调群由约化连续链复形

$$\tilde{S}(X) : \cdots \to \tilde{S}_n(X) \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} \tilde{S}_{n-1}(X) \to \cdots \to \tilde{S}_1(X)$$

$$\xrightarrow{\tilde{\partial}_1} \tilde{S}_0(X) \xrightarrow{\tilde{\partial}_0} \tilde{S}_{-1}(X) \to 0 \to \cdots$$

即

$$\cdots \to S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \to \cdots \to S_1(X)$$

$$\xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 \to \cdots$$

得到，为了得到上同调群，取对偶，也就是将 $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathbb{Z})$ 作用上去. 于是得

$$\cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta^{-1}} \mathrm{Hom}(S_0(X), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}(S_1(X), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^1}$$

$$\cdots \to \mathrm{Hom}(S_n(X), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^n} \mathrm{Hom}(S_{n+1}(X), \mathbb{Z}) \to \cdots,$$

其中 $\delta^n = \mathrm{Hom}(\tilde{\partial}_{n+1}, \mathbb{Z})$. 而 X 的 n 维约化上同调群

$$\tilde{H}^n(X) = \mathrm{Ker}\ \delta^n / \mathrm{Im}\ \delta^{n-1}.$$

在 0 维上同调群和约化上同调群之间，存在着如下的关系

$$H^0(X) = \tilde{H}^0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

它的证明请读者自行补出.

和单纯的情形一样，对 $c_p \in S_p(X), d^p \in S^p(X) = \mathrm{Hom}(S_p(X), \mathbb{Z})$, 将 $d^p(c_p)$ 记为 $\langle d^p, c_p \rangle$, 它是 $\mathbb{Z}$ 的元. 将 $\langle d^p, c_p \rangle$ 叫做 d^p 和 c_p 的 Kronecker 积. 显然， Kronecker 积是双线性的，而且有等式

$$\langle \delta d^{p-1}, c_p \rangle = \langle d^{p-1}, \partial c_p \rangle.$$

通过这个等式，可以在 $H^p(X)$ 和 $H_p(X)$ 间建立一个 Kronecker 积如下：

$$\langle [z^p], [x_p] \rangle = \langle z^p, x_p \rangle.$$

为了证明这个定义的合理性，只要验证上式的左端，与代表元 z^p 和 x_p 的取法无关即可. 现在

$$\begin{aligned}
&\langle z^p + \delta d^{p-1}, x_p + \partial c_{p+1} \rangle \\
&= \langle z^p, x_p \rangle + \langle \delta d^{p-1}, x_p \rangle + \langle z^p, \partial c_{p+1} \rangle + \langle \delta d^{p-1}, \partial c_{p+1} \rangle \\
&= \langle z^p, x_p \rangle + \langle d^{p-1}, \partial x_p \rangle + \langle \delta z^p, c_{p+1} \rangle + \langle d^{p-1}, \partial\partial c_{p+1} \rangle \\
&= \langle z^p, x_p \rangle + \langle d^{p-1}, 0 \rangle + \langle 0, c_{p+1} \rangle + \langle d^{p-1}, 0 \rangle \\
&= \langle z^p, x_p \rangle.
\end{aligned}$$

所以得证.

§17. 连续同调群的同伦不变性

上节已经证明连续同调群的拓扑不变性. 本节证明它的同伦不变性.

在开始证明以前，我们先回顾一下，在单纯同调论中，相应的命题是怎样证明的. 我们知道，它是“同伦的映射在同调群上导出同一同态”这一结果的推论. “同伦的映射在同调群上导出同一同态”的证明，大致说来是分两步，第一步先将同伦的映射分解为一连串、彼此很接近的映射. 所谓彼此很接近的映射，意思是指它们有同一个单纯逼近 (等价的，它们满足“同一个”星形条件); 其次是证明，不同的单纯逼近，在同调群上导出的同态相同. 在这里，关键的一步是后者，而为了保证后者成立，我们选用单纯逼近的条件是：它们均由同一个单形 (点状承载子) 承载. 于是可用 (15.15). 现在如用类似办法就涉及到连续同调群的计算问题. (当然，计算的问题，实际上在有了连续同调群的定义以后，就已产生. 这里只不过是指出，这种计算确有需要而已).

连续链复形 $S(X)=\{S_n(X),\partial_n\}$ 中所涉及的链群 $S_n(X)$，一般均较大. 因此，一般说来，直接用它来计算 $H_n(X)$ 是很困难的. 但对于一些特殊的空间 (如下面的一些例子所显示的)，$H_n(X)$ 的计算还是有可能的.

17.1 命题 如果 P 是单点空间，那么

$$H_n(P)=\begin{cases}0, & n\neq 0,\\ \mathbb{Z}, & n=0.\end{cases}$$

证明 由于 P 是由一个点所构成的空间，因此连续 n 单形只有一个，故 $S_n(P)=\mathbb{Z}$. 而

$$\partial_n: S_n(P)\to S_{n-1}(P)$$

作用在母元 σ 上，按定义为

$$\partial_n\sigma=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma\circ F^i.$$

因此当 n 为奇数时，右端共有偶数项，正负抵消，当 n 为偶数

时，右端共有奇数项，正负抵消后，尚余一项．于是

$$S(P):\quad \begin{aligned}&\cdots \to S_{2k}(P)(=\mathbb{Z}) \xrightarrow{1} S_{2k-1}(P)(=\mathbb{Z}) \xrightarrow{0}\\ &\xrightarrow{0} S_{2k-2}(P)(=\mathbb{Z}) \to \cdots \xrightarrow{1} S_1(P)(=\mathbb{Z})\\ &\xrightarrow{0} S_0(P)(=\mathbb{Z})\end{aligned}$$

正合，命题得证． ◁

¡　由 (16.20) 知，对所有的 n, $\tilde{H}_n(P)=0$. 关于上同调群，有同样结果：　$\tilde{H}^n(P)=0, n\in\mathbb{Z}$. 这些都和单纯同调一致.

17.2　定义　空间 X 叫做点状的，如果它和单点空间 P 具有相同的同调群.

17.3　定理　若 C 为空间 E^N 中的凸子空间，那么 C 为点状的，即

$$\tilde{H}_n(C)=0,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

证明　设 $\sigma:\triangle_n\to C$ 为 $S_n(C)$ 的一个母元．命

$$P\circ\sigma:\triangle_{n+1}\to C$$

$$(x_0,x_1,\cdots,x_{n+1})$$

$$\mapsto \begin{cases}P, & x_0=1,\\ x_0P+(1-x_0)\sigma\left(\dfrac{x_1}{1-x_0},\cdots,\dfrac{x_{n+1}}{1-x_0}\right), & x_0<1.\end{cases}$$

(其中 P 为 C 的一个固定点)．由于 C 为凸子空间，故上述定义合理．于是 $P\circ\sigma\in S_{n+1}(C)$. 经线性扩充后，得同态

$$P:S_n(C)\to S_{n+1}(C).$$

易知有 (参见 §16 (1))

$$\tilde{\partial}P=1-P\tilde{\partial}. \tag{1}$$

因此 $\tilde{H}_n(C)=0$. ◁

¡ 对于上同调，我们有同一结果

$$\tilde{H}^n(C)=0, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

它的证明，只要对 (1) 取 Hom 即知.

下面开始证明同伦不变性.

17.4 引理 对于空间 X 和映射 $i_k: X\to X\times I(i_k(x)=(x,k)), k=0,1$. 存在着同态 $D_n^X: S_n(X)\to S_{n+1}(X\times I)$ 适合以下两个条件:

1) $\partial_{n+1}D_n+D_{n-1}\partial_n=S_n(i_0)-S_n(i_1)$,

2) (自然性) 下面的图

$$\begin{array}{ccc} S_n(\triangle_n) & \xrightarrow{D_n^{\triangle_n}} & S_{n+1}(\triangle_n\times I) \\ S_n(f)\downarrow & & \downarrow S_{n+1}(f\times 1) \\ S_n(X) & \xrightarrow{D_n^X} & S_{n+1}(X\times I) \end{array}$$

可换，其中 $f:\triangle_n\to X$ 为映射，而 $f\times 1:\triangle_n\times I\to X\times I$ 由 $(f\times 1)(x,t)=(f(x),t)$ 定义.

证明 首先我们指出，由自然性 2) 可以得到以下的两个事实:

(i) 对于任意的映射 $g:X\to Y$, 下图可换:

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{D_n^X} & S_{n+1}(X\times I) \\ S_n(g)\downarrow & & \downarrow S_{n+1}(g\times 1) \\ S_n(Y) & \xrightarrow{D_n^Y} & S_{n+1}(Y\times I) \end{array}$$

(ii) 在 $S_n(X)$ 上定义的 D_n^X, 完全由在 $S_n(\triangle_n)$ 上定义的 $D_n^{\triangle_n}$ 决定. 实际上，只由一个元素 $D_n^{\triangle_n}(\iota_n)$ 决定！这里 $\iota_n\in S_n(\triangle_n)$ 为 $1:\triangle_n\to\triangle_n$.

性质 (i) 可以由 2) 直接推出. 通常说自然性就是指 (i) 成立. 不过， 2) 保证了 (i) 成立.

至于 (ii), 可以证明如下.

因为 D_n^X 是同态, 只要考虑它在基元素上的值就可以了.

对 $S_n(X)$ 的基元 σ, 为了说明 $D_n^X(\sigma)$ 完全由 $D_n^{\triangle_n}(\iota_n)$ 决定, 只要在 2) 中, 用 $\sigma:\triangle_n\to X$ 做为 f 就可以了. 因为这时由 2), 应有

$$D_n^X(\sigma)=D_n^X(S_n(\sigma)\iota_n)=S_{n+1}(\sigma\times 1)(D_n^{\triangle_n}(\iota_n)).$$

右端当 σ 给定以后, 只依赖于 $D_n^{\triangle_n}(\iota_n)$. 所以 (ii) 成立.

根据已经证明的性质 (ii). 为了决定 D_n^X, 我们只要对每个 n, 定出 $D_n^{\triangle_n}(\iota_n)$ 就行了.

我们对 n 行归纳法.

当 $n=0$ 时, $\triangle_0=e_0^0$ 是一个点. $\triangle_0\times I=e_0^0\times I$ 是一个凸集. 而 $S_0(i_k)(\iota_0)$ 就是 $e_0^0\times k, k=0,1$, 因此由 $\varepsilon((S_0(i_0)-S_0(i_1))(\iota_0))=0$, 和 (17.3), 有 $D_0^{\triangle_0}(\iota_0)\in S_1(\triangle_0\times I)$ 使 $\partial_1 D_0^{\triangle_0}(\iota_0)=S_0(i_0)(\iota_0)-S_0(i_1)(\iota_0)$ 成立. 从而适合条件 1) 和 2) 的 D_0^X 就定义好.

假设当 $k<n$ 时, D_k^X 已定义好, 而且适合条件 1) 和 2).

现在来决定 $D_n^{\triangle_n}(\iota_n)$. 为此考虑 $S_n(\triangle_n\times I)$ 中的元

$$S_n(i_0)\iota_n-S_n(i_1)\iota_n-D_{n-1}\partial_n\iota_n.$$

这个元是闭的. 实际上,

$$\partial_n(S_n(i_0)\iota_n-S_n(i_1)\iota_n-D_{n-1}\partial_n(\iota_n))$$

$$=\partial_n S_n(i_0)\iota_n-\partial_n S_n(i_1)\iota_n-\partial_n D_{n-1}\partial_n(\iota_n).$$

由于按归纳假定, D_{n-1} 已有定义, 而且条件 1), 即 $\partial_n D_{n-1}+D_{n-2}\partial_{n-1}=S_{n-1}(i_0)-S_{n-1}(i_1)$ 成立. 再注意, $S_n(i_k)$ 为链映射, 故上式

$$=S_{n-1}(i_0)\partial_n\iota_n-S_{n-1}(i_1)\partial_n\iota_n-(S_{n-1}(i_0)-S_{n-1}(i_1)$$

$$-D_{n-2}\partial_{n-1})\partial_n(\iota_n)$$

$$= S_{n-1}(i_0)\partial_n \iota_n - S_{n-1}(i_1)\partial_n \iota_n - S_{n-1}(i_0)\partial_n \iota_n$$

$$+S_{n-1}(i_1)\partial_n \iota_n$$

$$= 0.$$

由于 $\triangle_n \times I$ 是凸集，因此 $S_n(\triangle_n \times I)$ 中的闭链必为边缘链.于是有 $S_{n+1}(\triangle_n \times I)$ 的元 b_{n+1} 使

$$\partial_{n+1} b_{n+1} = S_n(i_0)\iota_n - S_n(i_1)\iota_n - D_{n-1}\partial_n \iota_n.$$

命 $D_n^{\triangle_n}(\iota_n) = b_{n+1}$, 那么

$$\partial_{n+1} D_n + D_{n-1}\partial_n = S_n(i_0) - S_n(i_1)$$

对 $\iota_n \in S_n(\triangle_n)$ 成立. 定义

$$D_n^X(\sigma) = S_{n+1}(\sigma \times 1)D_n^{\triangle_n}(\iota_n),$$

那么自然性 2) 成立.

下面再来验证 1) 成立:

$$\partial_{n+1} D_n(\sigma)$$

$$= \partial_{n+1} S_{n+1}(\sigma \times 1)D_n^{\triangle_n}(\iota_n)$$

$$= S_n(\sigma \times 1)\partial_{n+1} D_n(\iota_n)$$

$$= S_n(\sigma \times 1)(S_n(i_0) - S_n(i_1) - D_{n-1}\partial_n)(\iota_n)$$

$$= S_n(i_0)S_n(\sigma)(\iota_n) - S_n(i_1)S_n(\sigma)(\iota_n)$$

$$-S_n(\sigma \times 1)D_{n-1}\partial_n(\iota_n)$$

$$= S_n(i_0)(\sigma) - S_n(i_1)(\sigma) - D_{n-1}S_{n-1}(\sigma)\partial_n \iota_n \quad \text{(自然性)}$$

$$= S_n(i_0)(\sigma) - S_n(i_1)(\sigma) - D_{n-1}\partial_n S_n(\sigma)\iota_n$$

$$= (S_n(i_0) - S_n(i_1) - D_{n-1}\partial_n)(\sigma).$$

至此，D_n 的归纳构造完成．引理得证． ◁

¡ 1) 在归纳构造 D_n^X 的过程中，$S_n(X \times I)$ 中的元

$$S_n(i_0)(\sigma) - S_n(i_1)(\sigma) - D_{n-1}\partial_n(\sigma)$$

是闭的 (直接计算就可以知道)．但由于一般而言，$X \times I$ 不是点状的，因此无法证明它是边缘链．现在利用自然性，将一般情形的 $X \times I$, 转化为 $\triangle_n \times I$, 而 $\triangle_n \times I$ 是点状的，从而证明完成．因此，自然性在此是极其重要的．

2) 因为 $D_n^X(\sigma)$ 是通过自然性由 $D_n^{\triangle_n}(\iota_n)$ 得到，因此 $|D_n^X(\sigma)| \subset |\sigma| \times I$.

3) 在证明过程中，b_{n+1} 只是证明它存在．实际上，可以将它构造出来．

由于 $\triangle_n$ 是凸集，$\iota_n : \triangle_n \to \triangle_n$ 是线性的, 因此由 (16.10), 存在着 ι_n 上的代数柱形

$$D_n(e^0, \cdots, e^n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (e_0, \cdots, e_i, e_i', \cdots, e_n').$$

这个元素就可以做为 b_{n+1}. (为什么？)

17.5 定理 若 $f \simeq g : X \to Y$, 那么 f 和 g 在同调群上导出同一个同态

$$f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$f^* = g^* : H^n(Y) \to H^n(X), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

对约化同调群也有同样结果．

证明 按 $f \simeq g$ 的假定，存在 $F : X \times I \to Y$, 使 $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_0} & X \times I & \xleftarrow{i_1} & X \\ & f \searrow & \downarrow F & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array}$$

命 $i_k: X \to X \times I$ 由 $i_k(x) = (x, k), k = 0, 1$, 决定. 那么

$$f = F \circ i_0, \quad g = F \circ i_1.$$

为了证明 $f_* = g_*$, 只要证明 $S_n(f)$ 和 $S_n(g)$ 为链同伦的即可. 也就是, 存在同态

$$\tilde{D}_n : S_n(X) \to S_{n+1}(Y),$$

使

$$\partial_{n+1}\tilde{D}_n + \tilde{D}_{n-1}\partial_n = S_n(f) - S_n(g).$$

现在命 $\tilde{D}_n(\sigma) = S_{n+1}(F)D_n(\sigma)$, 这里 D_n 是引理 (17.4) 中的同态. 于是

$$\begin{aligned}
&\partial_{n+1}\tilde{D}_n(\sigma) \\
&= \partial_{n+1}S_{n+1}(F)D_n(\sigma) \\
&= S_n(F)\partial_{n+1}D_n(\sigma) \\
&= S_n(F)(S_n(i_0) - S_n(i_1) - D_{n-1}\partial_n)(\sigma) \\
&= (S_n(F \circ i_0) - S_n(F \circ i_1) - S_n(F)D_{n-1}\partial_n)(\sigma) \\
&= S_n(f)(\sigma) - S_n(g)(\sigma) - \tilde{D}_{n-1}\partial_n(\sigma).
\end{aligned}$$

因此 $f_* = g_*$ 得证.

至于 $f^* = g^*$, 由 $\tilde{D}_n$ 的对偶即知.

关于约化同调群的部分, 也是显然的, 这样整个定理得证. ◁

¡ 留意: $\tilde{D}_n$ 的存在是通过 $Y = X \times I$ 这个特殊情形由 D_n^X(17.4) 而得. 而 D_n^X 的存在, 又是通过 $X = \triangle_n$ 这个特殊情形由 $D_n^{\triangle_n}$ 而得. $D_n^{\triangle_n}$ 的存在, 前已指出, 依赖于 $\triangle_n \times I$ 为点状这一事实. 当然, 自然性在上述推理中也是不可缺的.

17.6　定理　若 $f: X \to Y$ 为同伦等价，那么

$$f_*: H_n(X) \to H_n(Y), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$f^*: H^n(Y) \to H^n(X), \quad n \in \mathbb{Z}$$

都是同构. 类似结论对约化同调群也对.

证明　由于 $f: X \to Y$ 为同伦等价，故有映射 $g: Y \to X$ 使 $gf \simeq 1_X, fg \simeq 1_Y$.

由定理 (17.5)，知 $(gf)_* = 1, (fg)_* = 1$. 但 $(gf)_* = g_* f_*$, $(fg)_* = f_* g_*$. 于是 g_* 为 f_* 的逆. 故 f_* 为同构.

同样的推理，对 f^* 也成立，故 f^* 也为同构.

至于约化同调群的部分是显然的. ◁

¡　本定理说明，柱面和 Mobius 带的同调群一致不是偶然的，因为它们都和圆周有同一同伦型. （为什么？）

一般来讲，为了计算空间 X 的同调群，当 X 较复杂时，我们可以换一个与 X 有同一同伦型的空间 Y 来计算.

17.7　定义　空间 X 叫做 **可缩的**，如果 X 上的恒同映射 1_X 和常值映射同伦.

17.8　命题　若空间 X 可缩，则 X 和单点空间有同一同伦型. 反之也真.

证明　请读者自行补出. ◁

17.9　例　凸集是可缩空间. 因此定理 (17.3) 是下述定理的特例.

17.10　定理　若 X 为可缩空间，则 X 是点状的.

证明　由于 X 和一个点所构成的空间有同一同伦型，故它们的同调群应一样. ◁

§18.　相对连续同调群、正合同调序列

对于连续同调群，我们也可以将它们相对化，得到相对连续同调群.

下面是具体的过程.

设 A 为 X 的子空间, 那么 $S(A)$ 可以用一种自然的方式视为 $S(X)$ 的子复形, 即: 它由 $S(X)$ 中那些承载集属于 A 的连续单形自由生成, 显然边缘运算在这个子复形上是封闭的, 即 $\partial_n : S_n(A) \to S_{n-1}(A)$. 因此 ∂ 导出

$$\overline{\partial}_n : S_n(X)/S_n(A) \to S_{n-1}(X)/S_{n-1}(A).$$

而且 $\overline{\partial}_{n-1}\overline{\partial}_n = 0$. 命

$$S_n(X, A) = S_n(X)/S_n(A).$$

称 $S(X, A) = \{S_n(X, A), \overline{\partial}_n\}$ 为 X 模 A 的连续链复形, 也称为 (X, A) **的连续链复形**.

由于 $\overline{\partial}_n\overline{\partial}_{n+1} = 0$, 故以下的定义是合理的.

18.1　定义　空间偶 (X, A) 的第 n 个连续同调群

$$H_n(X, A) = \mathrm{Ker}\overline{\partial}_n/\mathrm{Im}\overline{\partial}_{n+1}.$$

也称这个群为 **空间 X 模 A 的第 n 个同调群**.

设 $(X, A), (Y, B)$ 是两个空间偶, $f : (X, A) \to (Y, B)$ 是映 (X, A) 入 (Y, B) 的映射, 那么显然 f 导出的映射

$$S_n(f) : S_n(X) \to S_n(Y)$$

将子复形 $S_n(A)$ 映入 $S_n(B)$, 因此有

$$\overline{S}_n(f) : S_n(X, A) \to S_n(Y, B),$$

而且 $\overline{\partial}_n\overline{S}_n(f) = \overline{S}_{n-1}(f)\overline{\partial}_n$, 所以有连续同调群间的同态

$$f_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B).$$

相对连续上同调群, 可以通过对偶而得. 和单纯的情形一样, k 维连续上链群

$$S^k(X, A) = \mathrm{Hom}(S_k(X, A), \mathbb{Z})$$

可以看做是 k 维连续上链群 $S^k(X)$ 的这样一个子群：它由在 $S_k(A)$ 上取值为 0 的那些 k 维连续上链组成 (参见 §10 末尾).

18.2　命题　若 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 和 $g:(Y,B)\to(Z,C)$ 均为空间偶间的映射，又 $1:(X,A)\to(X,A)$ 为恒同映射，那么

$$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*,\quad 1_*=1.$$

证明　直接验算即得. ◁

18.3　命题　命

$$Z_n(X,A)=\{c|\partial c\in S_{n-1}(A)\}\subset S_n(X),$$

$$B_n(X,A)=\{c|\exists c'\in S_n(A),\ \ c\sim c'\}\subset S_n(X).$$

并分别称之为 X 模 A 的 **相对闭链群** 和 **相对边缘链群**, 那么

$$H_n(X,A)=Z_n(X,A)/B_n(X,A).$$

证明　按定义 $\mathrm{Ker}\overline{\partial}_n=Z_n(X,A)/S_n(A)$, $\mathrm{Im}\overline{\partial}_{n+1}=B_n(X,A)/S_n(A)$, 故

$$H_n(X,A)=\mathrm{Ker}\overline{\partial}_n/\mathrm{Im}\overline{\partial}_{n+1}=\frac{Z_n(X,A)/S_n(A)}{B_n(X,A)/S_n(A)}=\frac{Z_n(X,A)}{B_n(X,A)}.$$

末一等式是群论中的. ◁

¡ 上述命题给出了 $H_n(X,A)$ 的几何解释. 即：它是相对闭链群模相对边缘链群的商群.

当 $A=\emptyset$ 时，约定 $S_k(A)=0$, 那么 $S_k(X,\emptyset)=S_k(X)$. 从而 $H_n(X,\emptyset)=H_n(X)$. 因此，这时略去 $\emptyset$ 意义还是明确的. 而且在这种看法下，(17.4), (17.5) 和 (17.6) 可以看做是对偶 $(X,\emptyset)$ 叙述并证明. 不难将这些结论推广到 $A\neq\emptyset$ 的情形.

18.4　引理　对于空间偶 (X,A) 和映射 $i_k:X\to X\times I, k=0,1$, 存在着同态 $\tilde{D}_n:S_n(X,A)\to S_{n+1}(X\times I,A\times I)$ 适合以下两个条件：

1) $\overline{\partial}_{n+1}\overline{D}_n + \overline{D}_{n-1}\overline{\partial}_n = \overline{S}_n(i_0) - \overline{S}_n(i_1)$,

2) (自然性) 对任意的 $g:(X,A)\to(Y,B)$, 下图可换:

$$\begin{array}{ccc} S_n(X,A) & \xrightarrow{\overline{D}_n} & S_{n+1}(X\times I, A\times I) \\ \downarrow \overline{S}_n(g) & & \downarrow \overline{S}_{n+1}(g\times 1) \\ S_n(Y,B) & \xrightarrow{\overline{D}_n} & S_{n+1}(Y\times I, B\times I). \end{array}$$

证明 只要注意 (17.4) 后 ¡ 2) 中指出的事实: $|D_n(\sigma)|\subset|\sigma|\times I$. 因此当 $c\in S_n(A)$ 时, $|D_n(c)|\subset A\times I$. 于是 (17.4) 中所定义的 $D_n^X: S_n(X)\to S_{n+1}(X\times I)$, 限制在 A 上为 D_n^A. 所以导出 $\overline{D}_n: S_n(X,A)\to S_{n+1}(X\times I, A\times I)$. $\overline{D}_n$ 适合 1) 和 2) 可由 D_n^X 适合相应的条件而知. ◁

18.5 定理 若 $f\simeq g:(X,A)\to(Y,B)$, 那么 f 和 g 在同调群上导出同一个同态

$$f_* = g_*: H_n(X,A)\to H_n(Y,B),\quad n\in\mathbb{Z},$$

$$f^* = g^*: H^n(X,A)\to H^n(Y,B),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

证明 由假定 $f\simeq g$, 知有 $F:(X\times I, A\times I)\to(Y,B)$ 使 $F(x,0)=f(x), F(x,1)=g(x), F(a,t)\in B, a\in A, t\in I$.

命 $D_n^{X,A}: S_n(X,A)\to S_{n+1}(Y,B)$ 为 $D_n^{X,A}=S_{n+1}(F)\overline{D}_n$, 这里 $\overline{D}_n$ 为引理 (18.4) 中所定义的同态. 于是由直接计算便有

$$\overline{\partial}_{n+1}D_n^{X,A} + D_{n-1}^{X,A}\overline{\partial}_n = \overline{S}_n(f) - \overline{S}_n(g).$$

所以 $f_* = g_*$.

取对偶便有 $f^* = g^*$. ◁

作为推论有

18.6 定理 (相对同调群的同伦不变性), 若 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 为同伦等价, 那么

$$f_*: H_n(X,A)\to H_n(Y,B),\quad n\in\mathbb{Z},$$

$$f^*: H^n(X,A)\to H^n(Y,B),\quad n\in\mathbb{Z},$$

都是同构. ◁

对空间偶 (X, A), 由于

$$0 \to S(A) \xrightarrow{i} S(X) \xrightarrow{\pi} S(X, A) \to 0$$

正合, 故由 (15.18), 有

18.7 定理 对于空间偶 (X, A), 序列

$$\cdots \to H_k(A) \xrightarrow{i_{k*}} H_k(X) \xrightarrow{\pi_{k*}} H_k(X, A) \xrightarrow{\triangle_k} H_{k-1}(A) \to \cdots \quad (1)$$

正合. 叫做 (X, A) 的正合同调序列. ◁

利用正合序列 (1), 我们可以证明

18.8 定理 对于映射 $f: (X, A) \to (Y, B)$. 如果 $f|_X : X \to Y$ 和 $f|_A : A \to B$ 都是同伦等价, 那么

$$f_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$$

对所有的 n 均为同构.

证明 考虑如下的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \to & H_n(A) & \to & H_n(X) & \to & H_n(X, A) & \to \\
& \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow (f|_X)_* & & \downarrow f_* & \\
\cdots \to & H_n(B) & \to & H_n(Y) & \to & H_n(Y, B) & \to
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
H_{n-1}(A) & \to & H_{n-1}(X) & \to \cdots \\
\downarrow (f|_A)_* & & \downarrow (f|_X)_* & \\
H_{n-1}(B) & \to & H_{n-1}(Y) & \to \cdots.
\end{array}$$

由假定 $f|_X$ 和 $f|_A$ 都是同伦等价, 因此由 $(f|_A)_*$ 和 $(f|_X)_*$ 都是同构 (17.6). 从而引用 5 引理 (11.10), 知 f_* 为同构. ◁

上述定理以 (18.6) 为自己的特例. 实际上, 只要注意 $f: (X, A) \to (Y, B)$ 为同伦等价, 那么 $f|_X$ 和 $f|_A$ 就都是同伦等价即可.

以下的例子表明，对于 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 而言，不能从 $f|_A$ 和 $f|_X$ 为同伦等价推出 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 本身为同伦等价. 因此 (18.8) 确较 (18.6) 为广.

考虑 $(X,A)=(E^n,S^{n-1}),(Y,B)=(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. $f:(E^n,S^{n-1})\to(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 为置入映射. 显然，$f|_{E^n}$ 和 $f|_{S^{n-1}}$ 都是同伦等价.（为什么？）但 f 不是同伦等价. 实际上，若 f 有同伦逆 $g:(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\to(E^n,S^{n-1})$ 使 $g\circ f\simeq 1:(E^n,S^{n-1})\to(E^n,S^{n-1})$ 的话. 那么 $(g\circ f)_*=1$. 但是 $(g\circ f)(E^n)\subset S^{n-1}$. 这是因为由 $g|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to S^{n-1}$, 知 $g(\mathbb{R}^n)\subset S^{n-1}$. 因此 $(g\circ f)(E^n)\subset S^{n-1}$. 既然 $(g\circ f)(E^n)\subset S^{n-1}$, 那么 $(g\circ f)_*=0$. 与 $(g\circ f)_*=1$ 矛盾. 所以 f 不可能有同伦逆.

§19. 切除性、Mayer-Vietoris 序列

到现在为止，我们将单纯同调群的许多结果推广到了连续的情形. 下面考虑连续情形的 Mayer-Vietoris 序列.

我们知道单纯情形的 Mayer - Vietoris 序列是由切除定理 (10.12) 导出的 (参见 §12). 所以我们先来考虑连续情形的切除定理.

切除定理 (10.12) 是说，如果 K_1 和 K_2 是复形 K 的两个子复形，那么置入映射 $i:(K_2,K_1\cap K_2)\to(K_1\cup K_2,K_1)$ 在同调群上导出的同态 i_{n*} 是同构. 很容易知道，在把 K_1 和 K_2 视为空间后，相应的命题并不成立，例如平面 $\mathbb{R}^2$ 中的子集 $X_1=\{(x,y)|x<0,y\geq 0\}\cup\left\{(x,y)|x>0,y\geq\sin\frac{1}{x}\right\}\cup\{(x,y)|x=0,y\geq -1\}$, $X_2=\{(x,y)|x<0,y\leq 0\}\cup\left\{(x,y)|x>0,y\leq\sin\frac{1}{x}\right\}\cup\{(x,y)|x=0,y\leq 1\}$. 于是 $X_1\cup X_2=\mathbb{R}^2$, $X_1\cap X_2$ 由两个道路连通分支组成. 不难证明 $H_1(\mathbb{R}^2,X_1)=0$, $H_1(X_2,X_1\cap X_2)=\mathbb{Z}$. 因此置入映射 $i:(X_2,X_1\cap X_2)\to(\mathbb{R}^2,X_1)$ 不可能导出同调群间的同构.

那么置入映射 i 能在同调群上导出同构的特征是什么呢？下面的命题回答了这个问题.

19.1　命题　设 X 是子空间 X_1 和 X_2 的并: $X = X_1 \cup X_2$, 于是置入映射 $i : (X_2, X_1 \cap X_2) \to (X, X_1)$ 导出同调群间的同构的充要条件是: 置入映射 $j : S(X_1) \cup S(X_2) \to S(X)$ 导出同调群间的同构.

证明　先看充分性.

对短正合序列

$$0 \to S(X_1) \cup S(X_2) \xrightarrow{j} S(X) \to \frac{S(X)}{S(X_1) \cup S(X_2)} \to 0$$

由 (15.18) 有一个长正合同调序列

$$\cdots \to H_k(S(X_1) \cup S(X_2)) \xrightarrow{j_{k*}} H_k(S(X)) \to$$

$$\to H_k\left(\frac{S(X)}{S(X_1) \cup S(X_2)}\right) \to H_{k-1}(S(X_1) \cup S(X_2)) \to \cdots.$$

如果对所有的 k, j_{k*} 为同构, 那么对所有的 k, $H_k\left(\frac{S(X)}{S(X_1)\cup S(X_2)}\right) = 0$.

再考虑由正合序列

$$0 \to \frac{S(X_1) \cup S(X_2)}{S(X_1)} \xrightarrow{\tau} \frac{S(X)}{S(X_1)} \to \frac{S(X)}{S(X_1) \cup S(X_2)} \to 0$$

所导出的长正合同调序列

$$\cdots \to H_k\left(\frac{S(X_1) \cup S(X_2)}{S(X_1)}\right) \xrightarrow{\overline{\iota}_{k*}} H_k\left(\frac{S(X)}{S(X_1)}\right) \to$$

$$\to H_k\left(\frac{S(X)}{S(X_1) \cup S(X_2)}\right) \to \cdots.$$

由于 $H_k\left(\frac{S(X)}{S(X_1) \cup S(X_2)}\right) = 0$ 对所有的 k 成立, 于是 $\overline{\iota}_{k_*}$: $H_k\left(\frac{S(X_1) \cup S(X_2)}{S(X_1)}\right) \to H_k\left(\frac{S(X)}{S(X_1)}\right)$ 对所有的 k 为同构.

考虑如下的交换图

$$\begin{array}{ccc}\dfrac{S(X_1)\cup S(X_2)}{S(X_1)} & \xrightarrow{\tilde{\imath}} & \dfrac{S(X)}{S(X_1)}\\ \tilde{\imath}\uparrow & & \uparrow i\\ \dfrac{S(X_2)}{S(X_1)\cap S(X_2)} & = & \dfrac{S(X_2)}{S(X_1\cap X_2)}.\end{array}$$

其中所有的箭头都是置入．由群论的定理，知 $\tilde{\imath}$ 为同构．于是它在同调群上导出同构．再加上上面已经证明的 $\tilde{\imath}_{k*}$ 也是同构，知 i_{k*} 全为同构．

必要性部分，只要把上述证明倒过来叙述一遍即可． ◁

至此，对于连续同调群而言，切除定理能否成立，完全看

$$j: S(X_1)\cup S(X_2)\to S(X)$$

能否导出同调群间的同构了．

为了进一步的讨论，我们先给出

19.2　定义　设 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$ 为 X 的一个覆盖．命 $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ 为 $S_n(X)$ 的这样一个子群：它由"小"单形 $\sigma:\triangle_n\to U_\alpha(\subset X)$ 生成．这时 $\sigma\circ F^i:\triangle_{n-1}\to U_\alpha$，故有 $\partial|S_n^{\mathcal{U}}(X): S_n^{\mathcal{U}}(X)\to S_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$．这样，$S^{\mathcal{U}}(X)=\{S_n^{\mathcal{U}}(X),\partial_n^{\mathcal{U}}=\partial|S_n^{\mathcal{U}}(X)\}$ 是 $S(X)$ 的一个子复形，叫做 (空间 X 的) 覆盖 $\mathcal{U}$ 的复形．

为了保证 j 能在同调群间导出同构，只要能证明它是链等价，即，可以定义一个反方向的链映射 $k: S(X)\to S(X_1)\cup S(X_2)$ 使 $j\circ k$ 和 $k\circ j$ 分别和相应的恒同映射为链同伦的．

显然，k 的意思就是要将象在 X 中的连续 n 单形 σ 变为象在 X_1 和 X_2 中的连续链，也就是说，要将 σ 分"小"．

我们先来看一下

$$k_0: S_0(X)\to S_0(X_1)\cup S_0(X_2).$$

显然，这时没有任何困难就可以将它定义好．

再看

$$k_1: S_1(X)\to S_1(X_1)\cup S_1(X_2).$$

任给基元 $\sigma_1 \in S_1(X)$. 由于 $\sigma_1 : \triangle_1 = I \to X$, 因此没有理由要求 $\sigma_1(I)$ 整个落在 X_1 或 X_2 中. 但和 §3 中考虑用分段线性映射来代替一般的映射那样, 可以考虑 σ_1 限制在 I 的子区间 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上的情况. 这时有可能出现 $\sigma_1\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ 整个落在 $X_1(X_2)$ 中. 如果还不行, 可以考虑 $\sigma_1\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right)$. 由于 σ_1 连续, 所以只要 $\sigma_1(0)$ 为 $X_1(X_2)$ 的内点, 那么最终总会有 $\sigma_1\left(\left[0, \frac{1}{2^N}\right]\right) \subset X_1(X_2)$. 于是为了保证 k_1 能定义, 要求 X 的点不是 X_1 的内点就是 X_2 的内点就行了. 也就是说, 要求 X_1 的内部和 X_2 的内部构成 X 的一个覆盖, 那么 k_1 就可以定义.

接下来, 该考虑

$$k_2 : S_2(X) \to S_2(X_1) \cup S_2(X_2).$$

任取基元 $\sigma_2 \in S_2(X)$, 那么由于 $\sigma_2 : \triangle_2 \to X$. 因此当 $\sigma_2(e_2^0)$ 为 $X_1(X_2)$ 的内点时, 只要 m 足够大, $Sd^{(m)}\triangle_2$ 中以 e_2^0 为一个顶点的三角形, 它在 σ_2 下的象就落在 $X_1(X_2)$ 中, 于是 k_2 也可定义.

再往上, 情况类似. 因此, 从以上的分析, 为了 k 能定义, 加 X_1 的内部和 X_2 的内部覆盖 X 是合适的.

实际上, 我们有

19.3 定理 若 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ 为 X 的一个子集组, 当 $\mathrm{Int}\mathcal{U} = \{\mathring{U}_\alpha\}$[1] 覆盖 X 时, 置入 (链) 映射

$$j : S^{\mathcal{U}}(X) \to S(X)$$

为链等价.

1) $\mathring{U}$ 表示点集 U 的内部.

如上所述，为了得到链映射 k，我们需要将 $S(X)$ 中的单形分小，从而得到 $S^{\mathcal{U}}(X)$ 中的元. 而分小的办法如上所述可以利用重心重分. 下面是它的严格形式及其性质.

19.4 引理 对于空间 X 存在自然的链映射

$$\mathcal{S}d_n : S_n(X) \to S_n(X).$$

和同态 $T_n^X : S_n(X) \to S_{n+1}(X)$ 适合以下两个条件：

1) $$\partial T + T\partial = \mathcal{S}d - 1. \tag{1}$$

2) (自然性) 下面的图

$$\begin{array}{ccc} S_n(\triangle_n) & \xrightarrow{\mathcal{S}d_n^{\triangle_n}} & S_n(\triangle_n) \\ S_n(f)\downarrow & & \downarrow S_n(f) \\ S_n(X) & \xrightarrow{\mathcal{S}d_n^X} & S_n(X) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S_n(\triangle_n) & \xrightarrow{T_n^{\triangle_n}} & S_{n+1}(\triangle_n) \\ S_n(f)\downarrow & & \downarrow S_{n+1}(f) \\ S_n(X) & \xrightarrow{T_n^X} & S_{n+1}(X) \end{array}$$

可换，其中 $f : \triangle_n \to X$ 为映射.

证明 首先我们指出，由自然性 2) 可以得到以下的两个事实：

(i) 对于任意的映射 $g : X \to Y$，下图可换：

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{\mathcal{S}d_n^X} & S_n(X) \\ S_n(g)\downarrow & & \downarrow S_n(g) \\ S_n(Y) & \xrightarrow{\mathcal{S}d_n^Y} & S_n(Y) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{T_n^X} & S_{n+1}(X) \\ S_n(g)\downarrow & & \downarrow S_{n+1}(g) \\ S_n(Y) & \xrightarrow{T_n^Y} & S_{n+1}(Y) \end{array}$$

(ii) 在 $S_n(X)$ 上定义的 $\mathcal{S}d_n^X$(T_n^X), 完全由在 $\triangle_n$ 上定义的 $\mathcal{S}d_n^{\triangle_n}$($T_n^{\triangle_n}$) 决定. 实际上, 只由一个元素 $\mathcal{S}d_n(\iota_n)(T_n^{\triangle_n}(\iota_n))$ 决定！这里 $\iota_n \in S_n(\triangle_n)$ 是恒同映射 $1:\triangle_n \to \triangle_n$.

性质 (i) 可以由 2) 直接推出. 通常说自然性就是指 (i) 成立. 不过, 2) 保证了 (i) 成立.

至于 (ii), 可以证明如下.

因为 $\mathcal{S}d_n^X$,T_n^X 是同态, 只要考虑它们在基元素上的值就可以了.

对 $S_n(X)$ 的基元 σ, 为了说明 $\mathcal{S}d_n^X(\sigma)$ 完全由 $\mathcal{S}d_n^{\triangle_n}(\iota_n)$ 决定, 只要在 2) 中, 用 $\sigma:\triangle_n \to X$ 做为 f 就可以了. 因为这时由 2), 应有

$$\mathcal{S}d_n^X(\sigma) = \mathcal{S}d_n^X(S_n(\sigma)\iota_n) = S_n(\sigma)(\mathcal{S}d_n^{\triangle_n}(\iota_n)).$$

右端当 σ 给定以后, 只依赖于 $\mathcal{S}d_n^{\triangle_n}(\iota_n)$.

关于 T_n^X 部分, 证明类似. 所以 (ii) 成立.

根据已经证明的性质 (ii). 为了决定 $\mathcal{S}d_k^X$, 我们只要对每个 k, 定出 $\mathcal{S}d_k^{\triangle_k}(\iota_k)$ 就行了.

我们对 k 行归纳法. 当 $k=0$ 时, 命

$$\mathcal{S}d_0 = 1.$$

设 $\mathcal{S}d_{n-1}:S_{n-1}(X)\to S_{n-1}(X)$ 在 $n\le k$ 时已定义好. 并且与 ∂ 可交换.

以 b_ι 表示 ι 的重心 (参见 (16.4)), 利用锥同态 (16.8) 来定义

$$\mathcal{S}d_k(\iota) = b_\iota(\mathcal{S}d_{k-1}(\partial\iota)).$$

那么

$$\begin{aligned}
&\partial_k \mathcal{S}d_k(\iota)\\
&= \partial_k(b_\iota(\mathcal{S}d_{k-1}(\partial\iota))\\
&= \mathcal{S}d_{k-1}(\partial\iota) - b_\iota(\partial_{k-1}\mathcal{S}d_{k-1}(\partial\iota)) \quad ((16.9) \text{ 的 } (1))\\
&= \mathcal{S}d_{k-1}(\partial\iota) - b_\iota(\mathcal{S}d_{k-1}\partial(\partial\iota)) \quad (\text{归纳假定})\\
&= \mathcal{S}d_{k-1}(\partial\iota).
\end{aligned}$$

对一般的空间 X, 定义自然的

$$\mathcal{S}d_n^X : S_n(X) \to S_n(X)$$

为

$$\mathcal{S}d_n^X(\sigma) = S_n(\sigma)(\mathcal{S}d_n^{\triangle_n}(\iota_n)),$$

这里 $\sigma \in S_n(X)$ 为母元. 于是 $\mathcal{S}d^X$ 为链映射.

再来归纳地定义自然的

$$T_n^X : S_n(X) \to S_{n+1}(X)$$

使有 (1).

当 $n=0$ 时, 命 $T_0 = 0$.

假定 T_k^X 在 $k<n$ 时已定义好, 且适合 (1). 现在来定义 T_n^X. 前已指出, 这时只要定义好 $T_n^{\triangle_n}(\iota_n)$ 就可以了. 为此考虑 $S_n(\triangle_n)$ 中的元

$$\partial(\mathcal{S}d\iota - \iota - T(\partial\iota)).$$

注意

$$\begin{aligned}
\partial\mathcal{S}d\iota - \partial\iota - \partial T(\partial\iota) &= \partial\mathcal{S}d\iota - \partial\iota - (\mathcal{S}d\partial\iota - \partial\iota - T\partial\partial\iota)\\
&= \partial\mathcal{S}d\iota - \partial\iota - (\mathcal{S}d\partial\iota - \partial\iota) = 0.
\end{aligned}$$

而 $\triangle_n$ 是点状的，故

$$\partial(\mathcal{S}d\iota - \iota - T(\partial\iota))$$

在 ∂ 下有原象 c_{n+1}. 以之为 $T_n^{\triangle_n}(\iota_n)$. 那么 T_n^X 就定义好，而且适合 (1). 归纳定义完成. ◁

¡ 1) $\mathcal{S}d$ 和 T 的几何意义如何，请读者完成.

2) 在归纳构造 T_n^X 的过程中， $S_n(X)$ 中的元

$$\partial(\mathcal{S}d\sigma - \sigma - T(\partial\sigma))$$

是闭的 (直接计算就可以知道). 但由于一般而言， X 不是点状的，因此无法证明它是边缘链. 现在利用自然性，将一般情形的 X, 转化为 $\triangle_n$, 而 $\triangle_n$ 是点状的，从而证明完成. 因此，点状和自然性在此是极其重要的.

3) 因为 $\mathcal{S}d_n^X(\sigma)$ 是通过自然性由 $\mathcal{S}d_n^{\triangle_n}(\iota_n)$ 得到, 因此 $|\mathcal{S}d_n^X(\sigma)| \subset |\sigma|$. 而 $\mathcal{S}d_n^{\triangle_n}(\iota_n)$ 的每一项, 其承载集为 $\triangle_n$ 的重分 $Sd\triangle_n$ 中某个单形.

4) 因为 $T_n^X(\sigma)$ 是通过自然性由 $T_n^{\triangle_n}(\iota_n)$ 得到, 因此 $|T_n^X(\sigma)| \subset |\sigma|$.

5) 在证明过程中， c_{n+1} 只是证明它存在. 实际上，可以将它构造出来:

$$c_{n+1} = b_\sigma(\mathcal{S}d\sigma - \sigma - T(\partial\sigma)),$$

这里 b_σ 是 σ 的重心.

6) 试与 (17.4) 的证明比较.

19.5 定理 设 $\sigma : \triangle_n \to X$ 为 X 的一个连续 n 单形. 于是存在整数 m , 使

$$\mathcal{S}d^m\sigma \in S_n^{\mathcal{U}}(X),$$

其中 $\mathcal{S}d^m = \mathcal{S}d\mathcal{S}d^{m-1}, m \geq 1$.

证明 对 X 的连续 n 单形 $\sigma:\triangle_n \to X$, 由于 $\triangle_n$ 紧，故对 $\text{Int}\mathcal{U}$ 有 Lebesgue 数 (参见 (8.16) 的证明) $\delta > 0$. 这时对 $\triangle_n$ 中直径 $< \delta$ 的任意一个集合 M, 必有指标 α 存在，使 $\sigma(M) \subset U_\alpha$. 再由 (8.15), 知有整数 m, 使 $Sd^m\triangle_n$ 的单形，其直径一定 $< \delta$. 于是 (参见上面的 3))

$$\mathcal{S}d^m\sigma \in S_n^{\mathcal{U}}(X). \qquad \triangleleft$$

现在可以来定义映射 $k: S(X) \to S^{\mathcal{U}}(X)$ 了.

为了定义 k, 对每个 $\sigma \in S_n(X)$, 命 $m(\sigma)$ 为最小的整数，使

$$\mathcal{S}d^{m(\sigma)}\sigma \in S_n^{\mathcal{U}}(X).$$

注意，对 $i = 0, 1, \cdots, n, m(\sigma) \geq m(\sigma \circ F^i)$.

给定 σ, 命

$$\begin{aligned} k(\sigma) &= \mathcal{S}d^{m(\sigma)}\sigma - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i T(\mathcal{S}d^{m(\sigma\circ F^i)} \\ &\quad + \cdots + \mathcal{S}d^{m(\sigma)-1})(\sigma \circ F^i). \end{aligned}$$

由于上式右端都是 $S^{\mathcal{U}}(X)$ 的元，因此 k 的定义完成.

现在我们可以证明 (19.3) 了. 我们把它重写为

19.6 定理 映射 $k: S(X) \to S^{\mathcal{U}}(X)$ 是链映射而且是链映射 $j: S^{\mathcal{U}}(X) \to S(X)$ 的链同伦逆.

证明 由于 $kj = 1$ 是显然的 (注意，当 $\sigma \in S^{\mathcal{U}}(X)$ 时，$m(\sigma) = 0$). 所以只要证明 $jk \simeq 1$. 为此定义

$$\begin{aligned} \mathcal{J}: \quad & S_n(X) \to S_{n+1}(X) \\ & \sigma \mapsto T(1 + \mathcal{S}d + \cdots + \mathcal{S}d^{m(\sigma)-1})\sigma. \end{aligned}$$

它满足等式

$$\partial\mathcal{J} + \mathcal{J}\partial = jk - 1.$$

实际上

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}(\partial\sigma)+\sum_i(-1)^iT(\mathcal{S}d^{m(\sigma\circ F^i)}+\cdots+\mathcal{S}d^{m(\sigma)-1})(\sigma\circ F^i)\\
&\quad=T(1+\mathcal{S}d+\cdots+\mathcal{S}d^{m(\sigma)-1})\partial\sigma\\
&\quad=T\partial(1+\mathcal{S}d+\cdots+\mathcal{S}d^{m(\sigma)-1})\sigma\\
&\quad=((\mathcal{S}d^{m(\sigma)}-1)-\partial T(1+\mathcal{S}d+\cdots+\mathcal{S}d^{m(\sigma)-1}))\sigma\\
&\quad=\mathcal{S}d^{m(\sigma)}\sigma-\sigma-\partial\mathcal{J}(\sigma).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\partial\mathcal{J}(\sigma)+\mathcal{J}(\partial\sigma)\quad&=\mathcal{S}d^{m(\sigma)}\sigma-\sigma-\sum_i(-1)^iT(\mathcal{S}d^{m(\sigma\circ F^i)}\\
&\quad+\cdots+\mathcal{S}d^{m(\sigma)-1})\sigma\circ F^i\\
&=jk\sigma-\sigma.
\end{aligned}
$$

至此定理得证. ◁

19.7　推论(切除性定理 I)　若 X 的子空间 X_1 和 X_2 使 $X=\mathring{X}_1\cup\mathring{X}_2$, 那么置入映射

$$i:(X_2,X_1\cap X_2)\to(X,X_1)$$

导出同调群间的同构.

证明　由 (19.3) 和 (19.1) 即得. ◁

切除定理还有另一个形式 (参见 (10.12) 后的 ¡): 在复形偶 (K,K_1) 里切除 K_1 中的一个开集 O, 相对同调群不变.

现在我们也有相应结果

19.8　定理(切除定理 II).　设 A 为 X 的子空间, $U(\subset A)$ 使 $\overline{U}\subset\mathring{A}$. 于是置入映射 $i:(X\backslash U,A\backslash U)\to(X,A)$ 导出同调群间的同构.

证明 命 $X_1 = A, X_2 = X - U$. 那么 $\mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2 = \mathring{A} \cup (X - U)^\circ = \mathring{A} \cup (X - \overline{U}) \supset \mathring{A} \cup (X - \mathring{A}) = X$. 于是由 (19.7), 置入映射

$$i : (X_2, X_1 \cap X_2) = (X \backslash U, A \backslash U) \to (X, X_1)$$

导出同调群间的同构. 故定理得证. ◁

19.9 定理 切除定理 I 和切除定理 II 等价.

证明 (19.8) 表明切除定理 II 是 I 的推论.

下面证明切除定理 I 是 II 的推论.

命 $U = X \backslash X_2$, 那么由 $\overline{U} = \overline{X \backslash X_2} = X \backslash \mathring{X}_2 \subset \mathring{X}_1$, 故可对 (X, X_1) 及 $U = X \backslash X_2$ 用 (19.8), 得置入映射

$$i : (X \backslash U, X_1 \backslash U) = (X \backslash (X \backslash X_2), X_1 \backslash (X \backslash X_2))$$

$$= (X_2, X_1 \cap X_2) \to (X, X_1)$$

导出同调群间的同构. ◁

很容易举出例子, 说明复形 K 是子复形 K_1 和 K_2 的并, 但 $|K| \neq |\mathring{K}_1| \cup |\mathring{K}_2|$. 因此切除定理 I(或 II) 不能保证

$$i : (|K_2|, |K_1 \cap K_2|) \to (|K|, |K_1|)$$

导出同调间的同构. 可是我们可以用另外的办法加以证明. 下面举一个特例予以证明. 一般情形请读者补齐.

19.10 定理 若 K 为 n 维复形, A 为它的一个 n 维单形, K' 为 K 中去掉 A 以后所得的子复形, 那么置入映射

$$i : (|K'|, |\dot{A}|) \to (|K|, |A|)$$

在同调群上导出同构.

证明 $n = 0$ 时定理当然成立. (为什么？) 以下设 $n \geq 1$. 命 $U = \mathring{A}$, 那么 $|K'| = |K| \backslash U, |\dot{A}| = |A| \backslash U$, 但是 $\overline{U} \subset |\mathring{A}|$ 不

成立. 所以切除定理不能直接使用. 但我们有下述置入映射的交换图

$$\begin{array}{ccc}(|K'|,|\dot{A}|) & \xrightarrow{i} & (|K|,|A|) \\ i_1 \searrow & & \nearrow i_2 \\ & (|K|\setminus \overset{*}{A},|A|\setminus \overset{*}{A}) & \end{array},$$

其中 $\overset{*}{A}$ 为 A 的重心.

对于置入映射 i_2 来说, 这时切除定理就可以用了. 所以剩下的是证明 i_{1_*} 为同构.

由于 $\overset{*}{A}$ 为 A 的重心, 于是 $|A|\setminus \overset{*}{A}$ 的每个点 x, 可以沿射线 $\overset{*}{A}\,x$ 投射到 $|\dot{A}|$ 去. 显然这个投射是 $|A|\setminus \overset{*}{A}$ 到 $|\dot{A}|$ 的一个收缩. 这个收缩可以扩充为 $|K|\setminus \overset{*}{A}$ 到 $|K'|$ 的一个收缩 (只要让 $|K'|$ 上的点不动就行了). 于是由 5 引理知 i_{1_*} 是同构. ◁

19.11 定义 空间的三元组 (X,A,B) 叫做三重, 如果 $X\supset A\supset B$. 如果在 A,B 间不要求任何包含关系, 但 $X=A\cup B$, 则称有序组 $(X;A,B)$ 为三联.

¡ 在三联的记号 $(X;A,B)$ 中, 子空间 A,B 的次序是有关系的.

19.12 定义 三联 $(X;A,B)$ 叫做是可切除的, 如果置入映射 $i:(A,A\cap B)\to(X,B)$ 导出同调群间的同构.

19.13 命题 当 $X=\overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}$ 时, 三联 $(X;A,B)$ 和 $(X;B,A)$ 都是可切除的.

证明 这由 (19.7) 即知. ◁

19.14 引理 三联 $(X;A,B)$ 为可切除的充要条件是 $(X;B,A)$ 为可切除的. 即置入映射 $i:(A,A\cap B)\to(X,B)$ 导出同调群间的同构, 其充要条件是置入映射 $i':(B,A\cap B)\to(X,A)$ 也导出同调群间的同构.

证明 以 I 表区间 $[0,1]$, 命

$$C = A \cap B,$$

$$X' = (A \times \{0\}) \cup (C \times I) \cup (B \times \{1\}),$$

$$A' = (A \times \{0\}) \cup (C \times I),$$

$$B' = (C \times I) \cup (B \times \{1\}),$$

$$C' = C \times I.$$

那么投射 $p_X : X \times I \to X$ 导出的 $p_X|A' : (A', C') \to (A, C)$ 和 $p_X|B' : (B', C') \to (B, C)$ 都是同伦等价. （为什么？）因此它们在同调群上导出的同态都是同构.

现在由 $X' = \overset{\circ}{A}{}' \cup \overset{\circ}{B}{}'$, 故在交换图

$$\begin{array}{ccc}
H_k(A', C') & \xrightarrow{j'_*} & H_u(X', B') \\
\cong\downarrow (p_X|A')_* & & \downarrow p_{X_*} \\
H_n(A, C) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, B)
\end{array}$$

中, j'_* 为同构. 因此 $p_{X_*} : H_n(X', B') \to H_n(X, B)$ 为同构的充要条件是 $j_* : H_n(A, C) \to H_n(X, B)$ 为同构, 即 p_{X_*} 为同构等价于 $(X; A, B)$ 为可切除的.

将 5 引理用于交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & H_{n+1}(X', B') & \xrightarrow{\triangle} & H_n(B', C') & \xrightarrow{i} & H_n(X', C') & \xrightarrow{i'} \\
 & \downarrow p_{X_*} & & \downarrow (p_X|B')_* & & \downarrow p'_{X_*} & \\
\cdots \to & H_{n+1}(X, B) & \to & H_n(B, C) & \to & H_n(X, C) & \to
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(X', B') & \xrightarrow{\triangle} & H_{n-1}(B', C') & \to \cdots \\
\downarrow p_{X_*} & & \downarrow (p_X|B')_* & \\
H_n(X, B) & \to & H_{n-1}(B, C) & \to \cdots
\end{array}$$

（其中行的正合性, 由 $X' \supset B' \supset C'$ 和 $X \supset B \supset C$ 而知.）于是由 $(p_X|B')_*$ 为同构, 知 p'_{X_*} 为同构的充要条件是 p_{X_*} 为同

构. 故有 $p'_{X*}: H_n(X',C') \to H_n(X,C)$ 为同构的充要条件是 $(X;A,B)$ 为可切除的.

交换 A,B 的位置，得:

$p'_{X*}: H_n(X',C') \to H_n(X,C)$ 为同构的充要条件是 $(X;B,A)$ 为可切除的.

这样引理就得证. ◁

19.15 定理 如果 $(X;A,B)$ 为可切除的，又 $C \subset A\cap B$, 那么存在着正合列.

$$\begin{aligned}\cdots \to H_n(A\cap B,C) &\xrightarrow{(i_{1*},i_{2*})} H_n(A,C)\oplus H_n(B,C)\\ &\xrightarrow{(i_{3*},-i_{4*})} H_n(X,C) \xrightarrow{\triangle'} H_{n-1}(A\cap B,C)\to\cdots,\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $i_1:(A\cap B,C)\to(A,C), i_2:(A\cap B,C)\to(B,C), i_3:(A,C)\to(X,C), i_4:(B,C)\to(X,C)$ 均为置入映射， $\triangle'$ 为合成同态:

$$\begin{aligned}H_n(X,C) &\xrightarrow{J_*} H_n(X,B) \underset{\cong}{\xrightarrow{j_*^{-1}}} H_n(A,A\cap B)\\ &\xrightarrow{\triangle_1} H_{n-1}(A\cap B,C).\end{aligned}$$

证明 将 (12.2) 用于交换图

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots\to & H_n(A\cap B,C) & \xrightarrow{i_{1*}} & H_n(A,C) & \to & H_n(A,A\cap B)\\ & \downarrow i_{2*} & & \downarrow i_{3*} & & \cong\downarrow j_*\\ \cdots\to & H_n(B,C) & \xrightarrow{i_{4*}} & H_n(X,C) & \to & H_n(X,B)\\ \to & H_{n-1}(A\cap B,C) & \to\cdots\\ & \downarrow\\ \to & H_{n-1}(B,C) & \to\cdots\end{array}$$

立刻就得到结论. ◁

¡ 由 (19.14), 如果 $(X;A,B)$ 为可切除的，那么 $(X;B,A)$ 也是可切除的. 于是

$$j'_*: H_n(B,A\cap B)\to H_n(X,A)$$

也是同构. 命 $\triangle'': H_n(X,C) \to H_{n-1}(A\cap B, C)$ 为合成

$$H_n(X,C) \xrightarrow{J'_*} H_n(X,A) \xrightarrow{j'^{-1}_*} H_n(B, A\cap B)$$

$$\xrightarrow{\triangle_2} H_{n-1}(A\cap B, C).$$

那么我们有

19.16 引理 对所有的可切除三联 $(X;A,B)$,

$$\triangle' = -\triangle''.$$

证明 考虑下述可换的六角图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & H_n(X,C) & & & \\
 & J'_* \swarrow & & \Big| I & & \searrow J_* & \\
H_n(X,A) & & & \downarrow & & & H_n(X,B) \\
 & \nwarrow l' & & & & l \nearrow & \\
\cong\uparrow j'_* & & & H_n(X,A\cap B) & & & \cong\uparrow j_* \\
 & \nearrow k' & & \Big| & & k \nwarrow & \\
H_n(B,A\cap B) & & & \Big| & & & H_n(A,A\cap B) \\
 & \triangle_2 \searrow & & \downarrow \triangle & & \swarrow \triangle_1 & \\
 & & & H_{n-1}(A\cap B,C) & & &
\end{array}$$

图中垂直列和两个对角列均正合,而沿左侧由 $H_n(X,C)$ 到 $H_{n-1}(A\cap B,C)$ 为 $\triangle''$, 沿右侧为 $\triangle'$.

给定 $x\in H_n(X,C)$, 取 $y\in H_n(A,A\cap B)$ 使 $j_*y = J_*x$. 于是按定义 $\triangle_1 y = \triangle' x$. 由 $l(Ix-ky) = J_*x - j_*y = 0$, 知有 $y'\in H_n(B,A\cap B)$ 使 $k'y' = Ix - ky$. 于是

$$j'_*y' = l'k'y' = l'(Ix-ky) = l'Ix = J'_*x.$$

因此 $\triangle''x = \triangle_2 y' = \triangle k'y' = \triangle(Ix-ky) = -\triangle ky = -\triangle_1 y = -\triangle' x$. ◁

19.17 推论 如果 $(X;A,B)$ 为可切除的, 那么存在着如下的正合列

$$\cdots \to H_n(A\cap B) \to H_n(A)\oplus H_n(B) \to H_n(X)$$

$$\to H_{n-1}(A\cap B) \to \cdots.$$

当 $A\cap B\neq\emptyset$ 时，上述序列对于约化同调群也是正合的.

证明 在 (19.15) 中命 $C=\emptyset$ 即得前一断言. 对于后者，只要注意约化同调群是常值映射所导出的同态的核而知. $\lhd$

正合列 (2) 和它的特例 ((19.17) 中的正合列) 叫做连续同调群的 Mayer-Vietoris 序列. 它在 $(A\cap B,C),(A,C),(B,C)$ 和 (X,C) 的同调群之间建立了某种联系.

19.18 命题 如果 $(X;X_1,X_2)$ 是可切除的三联，又 $X\subset Y$，那么存在着正合列

$$\cdots\to H_n(Y,X_1\cap X_2)\to H_n(Y,X_1)\oplus H_n(Y,X_2)\to$$

$$\to H_n(Y,X)\to H_{n-1}(Y,X_1\cap X_2)\to\cdots.$$

证明 考虑如下的梯形

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\to & H_n(Y,X_1\cap X_2) & \to & H_n(Y,X_1) & \to & H_{n-1}(X_1,X_1\cap X_2) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \cong\downarrow j_* \\
\cdots\to & H_n(Y,X_2) & \to & H_n(Y,X) & \to & H_{n-1}(X,X_2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\to & H_{n-1}(Y,X_1\cap Y_2) & \to\cdots \\
 & \downarrow & \\
\to & H_{n-1}(Y,X_2) & \to\cdots,
\end{array}$$

其中第一行为 $(Y,X_1,X_2\cap X_2)$ 的正合同调列，第二行为 (Y,X,X_2) 的正合列. 未标明记号的垂直箭头由置入映射导出. 由于 $(X;X_1,X_2)$ 为可切除，故 $j_*:H_n(X_1,X_2\cap X_2)\to H_n(X,X_2)$ 为同构. 所以由 (12.2) 就得到所要的正合列. $\lhd$

§20. 零调模方法

在单纯同调论里，当我们构作链映射和链伦移时，点状承载子是一个非常有用的手段. 例如，标准链映射的存在 (7.12)，以及不同的标准链映射彼此为链同伦的 (7.16)，又如，映射的不同单

纯逼近为链同伦的 (8.11) 等等，点状承载子起着重要的作用．这些几何情形的论证，最后以代数的形式总结在 (15.5) 里．

在连续同调论里，特别是 (17.5) (实际上是 (17.4)，因为 (17.5) 由 (17.4) 导出)，(19.4)，我们又碰到了类似的链映射和链同伦的构作问题．但是这一轮，我们不是直接使用点状承载子，而是将一般空间的情形化为点状的情形来做，等做好了，再回到一般情形．具体讲，就是把一般空间 X 的情形化为 $X=\triangle_n$ 的情形．再利用 $\triangle_n$ 是点状的．问题很快就能解决．最后再从 $\triangle_n$ 回到一般空间去．

这个过程以后还将经常使用．所以我们予以总结．

先从以下的定义开始．

20.1 定义 范畴 K 叫做 **有模范畴**，如果 K 有一组指定的称为模的对象 $\mathcal{M}=\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$．函子 $F:K\to Ab$ 叫做对 $\mathcal{M}$ 自由，如果有集 $\{m_\beta|\in F(M_\beta),M_\beta\in\mathcal{M},\beta\in B\}$ 使

$$\{F(f)m_\beta|\beta\in B,\quad f\in\hom(M_\beta,X)\}$$

为群 $F(X)$ 的一组基 (故 $F(X)$ 自由)，这里 X 为 K 的任一对象．

函子 $F:K\to$Comp 叫做对 $\mathcal{M}$ 自由，如果每个 $F_n:K\to Ab$ 对 $\mathcal{M}$ 自由．

函子 $F:K\to$Comp 叫做对 $\mathcal{M}$ 正维零调，如果 $H_n(F(M_\alpha))=0$，对 $n>0$ 及所有的 $M_\alpha\in\mathcal{M}$ 均成立．

¡ 1) 关于 $F(X)$ 的基 $\{F(f)m_\beta\}$，应注意，当 $\beta\neq\beta'$ 时，不排除 $M_\beta=M_{\beta'}$．参见下面的例 20.3．

2) 由于 $F(X)$ 以 $\{F(f)m_\beta\}$ 为基，而 $M_\beta\in\mathcal{M}$，因此如果 F 对 $\mathcal{M}$ 自由，那么当 $\mathcal{M}$ 增大时，它也还是自由的．但是 F 对 $\mathcal{M}$ 正维零调，在 $\mathcal{M}$ 减少时保持．因此要使 F 既对 $\mathcal{M}$ 自由，又对 $\mathcal{M}$ 正维零调，$\mathcal{M}$ 的大小就得调整好，既不能大也不能小．

20.2 例 对范畴 Top，命 $\mathcal{M}=\{\triangle_p|p\geq 0\}$，那么

$$S_*:\text{Top}\to\text{Comp}$$

对 $\mathcal{M}$ 自由而且正维零调.

实际上, 正维零调是显然的, 而对 $\mathcal{M}$ 自由, 只要注意由恒同映射构成的集 $\iota_p : \triangle_p \to \triangle_p$ 是 $S_*(X)$ 的基 $\{\sigma_p\} = \{(S_*(\sigma_p)(\iota_p)\}$.

20.3 例 函子

$$F : \text{Top} \to \text{Comp}$$

也对上述 $\mathcal{M}$ 自由和正维零调. 这里 F 将 X 变成 $S_*(X \times I)$. 关于后一结论, 显然成立. 但是对于前一断言, 证明要费些周折. 实际上, 由于 $S_n(X \times I) = \{\sigma : \triangle_n \to X \times I\}$ 而 σ 对应于 $(p_1\sigma, p_2\sigma)$, 这里 $p_1 : X \times I \to X, p_2 : X \times I \to I$ 为投射. 故 $\sigma : \triangle_n \to X \times I$ 可以分解为

$$\sigma : \triangle_n \to \triangle_n \times I \to X \times I,$$

即

$$\sigma = (p_1\sigma \times 1)(1, p_2\sigma) = S(p_1\sigma \times 1)((1, p_2\sigma)),$$

故命 $\beta = p_2\sigma : \triangle_n \to I$, 取 $\{m_\beta\}$ 为 $\{(1, \beta)| \in S_n(\triangle_n \times I)\}$, 那么 F 就对 $\mathcal{M}$ 自由.

和 (20.3) 形成对比的是

20.4 例 将函子

$$F : \mathcal{K} \to \text{Comp}$$

换为取复形 K 的单纯链复形 $C(K)$ 的话. 那么 F 对上述的 $\mathcal{M}$ 不是自由的. 实际上, $C_n(K)$ 的基只是 $\{F(f)\iota_n | f \in \hom(\triangle_n, K)\}$ 中相应于单纯映射 f 将不同的顶点映为不同的顶点那一部分. 而由 $\{F(f)\iota_n\}$ 生成的自由群远较 $C_n(K)$ 为大. 它正好是有序链复形 $C_n(K_0)$. 所以将 F 换为取有序链复形倒是对 $\mathcal{M}$ 自由的. 当然这时也是正维零调的.

20.5 定理 (零调模方法) 设 K 为有模 $\mathcal{M}$ 的范畴. $F, G : K \to \text{Comp}$ 是两个非负函子 (即 $F_n = G_n = 0, n < 0$). 如

果 F 对 $\mathcal{M}$ 自由, G 对 $\mathcal{M}$ 正维零调, 那么每个自然变换 $\Phi: H_0(F) \to H_0(G)$ 均可由自然链映射 $\varphi: F \to G$ 导出. 而且任意两个这样的 φ 自然地链同伦.

证明 我们要证的是: 对 K 的每个对象 X, 可定义一个导出 Φ 的链映射

$$\varphi(X): F(X) \to G(X), \tag{1}$$

而自然性表示, 对任意的 $f: X \to Y$, 有可换图

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi(X)} & G(X) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & G(Y). \end{array} \tag{2}$$

又若 φ' 也导出 Φ, 则有链同伦

$$D(X): \varphi(X) \simeq \varphi'(X),$$

这里自然性表示, 对任意的 $f: X \to Y$, 有可换图

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{D(X)} & G(X) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{D(Y)} & G(Y). \end{array}$$

先来证明导出 Φ 的 (1) 存在.

因为 F 和 G 非负, 故有下述正合列

$$F_0(X) \xrightarrow{\pi_X} H_0(F(X)) \to 0$$

和

$$G_0(X) \xrightarrow{\pi'_X} H_0(G(X)) \to 0.$$

我们归纳地定义链映射 $\varphi(X) = \{\varphi_n(X) : F_n(X) \to G_n(X)\}$.

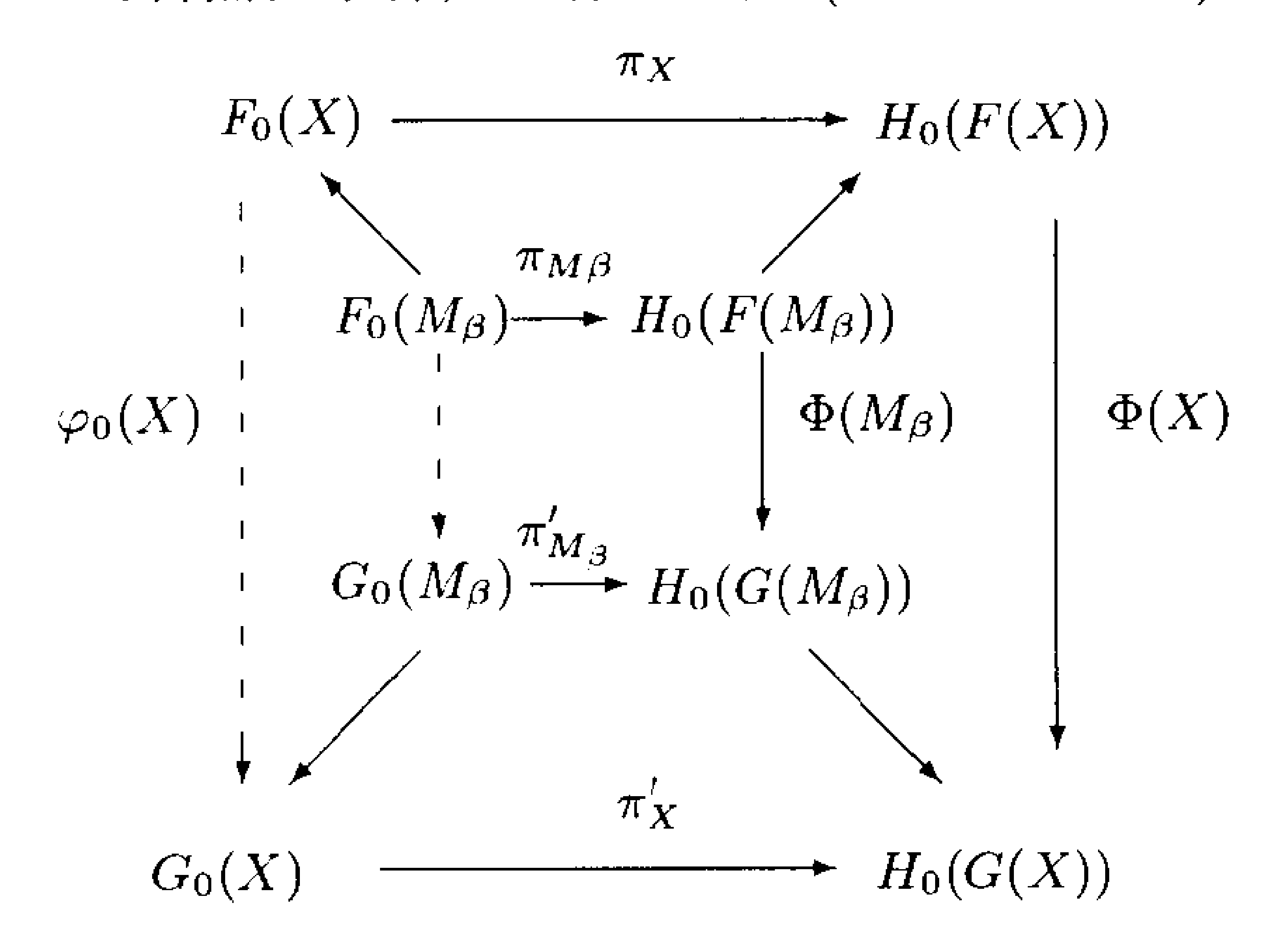
为了定义 $\varphi_0(X): F_0(X) \to G_0(X)$. 注意 $F_0(X)$ 有一组基 $\{F_0(f)m_\beta^0 | m_\beta^0 \in F_0(M_\beta)\}_{\beta\in B\subset A}$. 因此只要定义

$$\varphi_0(X)(F_0(f)(m_\beta^0))$$

适合条件 (它导出 $\Phi(X)$)

$$\pi'_X\varphi_0(X)F_0(f)(m_\beta^0) = \Phi(X)\pi_X(F_0(f)(m_\beta^0)). \tag{3}$$

注意, 由 Φ 的自然性条件, 故有可换图 (实线部分可换)



因此一旦定义好 $\varphi_0(M_\beta)(m_\beta^0)$ 适合条件

$$\pi'_{M_\beta}\varphi_0(M_\beta)(m_\beta^0) = \Phi(M_\beta)\pi_{M_\beta}(m_\beta^0), \tag{4}$$

那么命 $\varphi_0(X)F_0(f)(m_\beta^0) = G_0(f)\varphi_0(M_\beta)(m_\beta^0)$, 就有 (3) 成立. 但使 (4) 成立的 $\varphi_0(M_\beta): F_0(M_\beta) \to G_0(M_\beta)$ 存在, 这只要注意 $F_0(M_\beta)$ 自由, π'_{M_β} 满即可. 这样导出 $\Phi(X)$ 的 $\varphi_0(X)$ 定义好. 往下, 设

$$\varphi_n(X): F_n(X) \to G_n(X), \quad n \le k, \quad 0 \le k$$

已定义好, 且使图

$$\begin{array}{ccccc}
F_{k+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k(X) & \xrightarrow{\partial_k} & F_{k-1}(X) \\
\varphi_{k+1}(X)\downarrow & & \downarrow\varphi_k(X) & & \downarrow\varphi_{k-1}(X) \\
G_{k+1}(X) & \xrightarrow{\partial'_{k+1}} & G_k(X) & \xrightarrow{\partial'_k} & G_{k-1}(X)
\end{array}$$

中[1] 右边方块可换. 现在要定义 $\varphi_{k+1}(X)$, 使左边方块可换. 为此, 只要对 $F_{k+1}(X)$ 的基元 $F_{k+1}(f)(m_r^{k+1}), r \in C \subset A$, 定义其值且使左边方块交换即可. 而要做到这一点, 只要定义 $\varphi_{k+1}(M_r): F_{k+1}(M_r) \to G_{k+1}(M_r)$ 使图

$$\begin{array}{ccccc}
F_{k+1}(M_r) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k(M_r) & \xrightarrow{\partial_k} & F_{k-1}(M_r) \\
\downarrow\varphi_{k+1}(M_r) & & \downarrow\varphi_k(M_r) & & \downarrow\varphi_{k-1}(M_r) \\
G_{k+1}(M_r) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & G_k(M_r) & \xrightarrow{\partial_k} & G_{k-1}(M_r)
\end{array}$$

可换即可. 注意, $\varphi_k(M_r)\partial_{k+1}(m_r^{k+1}) \in \mathrm{Ker}\partial_k$. 实际上,

$$\partial_k\varphi_k(M_r)\partial_{k+1}(m_r^{k+1}) = \varphi_{k-1}(M_r)\partial_k\partial_{k+1}(m_r^{k+1}) = 0.$$

而由 G 正维零调 $(k > 0)$ 或 H_0 的定义 $(k = 0)$, 知 $\mathrm{Ker}\partial_k = \mathrm{Im}\partial_{k+1}$. 故有 $\varphi_{k+1}(M_r)(m_r^{k+1})$ 使方块可换. 于是有所要的

$$\varphi_{k+1}(X) : F_{k+1}(X) \to G_{k+1}(X).$$

至于另有 φ', 则连接它们的链同伦 D 可类似地构作. 自然性也可类似地证明. 请读者自行补出. ◁

20.6 推论 设 K 为有模 $\mathcal{M}$ 的范畴, $F, G : K \to \mathrm{Comp}$ 是两个非负函子. 如果 F, G 均对 $\mathcal{M}$ 自由且正维零调, 那么导出自然等价 $\Phi : H_0(F) \to H_0(G)$ 的自然链映射 $\varphi : F \to G$ 为链等价.

证明 若 $\Phi : H_0(F) \to H_0(G)$ 为自然等价, 那么存在 $\Psi : H_0(G) \to H_0(F)$ 使 $\Phi\Psi = 1, \Psi\Phi = 1$.

---

1) $F_{-1}(X) = H_0(F(X)), G_{-1}(X) = H_0(G(X)), \partial_0 = \pi_X, \partial'_0 = \pi'_X$.

设 φ,ψ 分别导出 Φ,Ψ. 那么 $\psi\circ\varphi$ 导出 $\Psi\Phi: H_0(F)\to H_0(F)$. 但 $\Psi\Phi=1$, 所以 $\psi\circ\varphi$ 导出 1. 另一方面, 恒同链映射 $1:F\to F$ 也导出 1. 由 (20.5), $\psi\circ\varphi\simeq 1$. 交换次序, 得 $\varphi\circ\psi\simeq 1$. 因此 φ 为等价. $\triangleleft$

为了说明 (20.5) 是很一般的, 我们用它来推导点状承载子定理 (7.19).

设 K,L 为复形, P 为点状承载子.

现在以 $\mathcal{A}$ 表这样一个范畴: 它的对象为 K 的子复形, 射为置入映射. 若 K' 为 K 的子复形, 以 $P(K')$ 表示 L 中子复形 $P(A)$ 的并, 这里 A 为 K' 的单形. 规定 $\mathcal{A}$ 的模 $\mathcal{M}$ 由 K 的子复形 A[1] 构成.

定义 $F:\mathcal{A}\to \mathrm{Comp}$ 为 $F(K')=C(K')$, F 将射 $j:K'\to K''$ 映为 $j_\#:C(K')\to C(K'')$. 又定义 G 为 $G(K')=C(P(K')),G(j)=i_\#:C(P(K'))\to C(P(K''))$, 这里 $i:P(K')\to P(K'')$ 为置入映射.

显然, F 和 G 都是函子, 而且 F 对 $\mathcal{M}$ 自由, G 对 $\mathcal{M}$ 正维零调.

(7.19) 的另一证明. 若导出同态 $\Phi:H_0(K)\to H_0(L)$ 的提升 $f=\{f_k:C_k(K)\to C_k(L)\}$ 和 $g=\{g_k:C_k(K)\to C_k(L)\}$ 均由 P 承载. $f_k:C_k(K)\to C_k(L)$ 可以视为 $f_k:F(K)\to G(K),g_k$ 也如此. 因此用 (20.5), 知 f 和 g 链同伦.

§21. 单纯同调论和连续同调论的关系

同调论的公理化

我们在第一章里面, 对于可剖分的空间, 介绍了单纯同调群. 在第五章里面, 对一般的拓扑空间, 介绍了连续同调群. 于是对

1) 这里 A 表示由 K 的单形 A 及其面所构成的子复形.

于可剖分空间来说，它既可有单纯同调群，又可有连续同调群．那么它们一致吗？我们现在就来回答这个问题．

在 (15.16) 中，我们已经证明，复形 K 的同调群和用有序链复形 K_0 决定的同调群一致．因此，我们先证明对于复形 K，存在同构 $H_n(K_0) \cong H_n(|K|)$．

21.1　引理　对于有序链复形来说，切除定理成立．即若复形 K 是它的子复形 K' 和 K'' 的并： $K = K' \cup K''$．那么对所有的 k，置入映射 $i: K'' \to K$ 导出的

$$H_k(K_0'', (K' \cap K'')_0) \to H_k(K_0, K_0')$$

均为同构．

证明　因为 $H_k(K) = H_k(K_0)$，故由 (15.16) 即知．或者直接按定义证明如下：

考虑合成映射

$$C(K_0'') \to C(K_0) \to C(K_0)/C(K_0'),$$

其中第一个由置入映射导出，第二个为商映射．

显然这个合成映射的核为

$$C(K_0'') \cap C(K_0') = C((K' \cap K'')_0).$$

因此得证．　◁

现在定义

$$\gamma : C_k(K_0) \to S_k(|K|),$$

$$\langle v_0 v_1 \cdots v_k \rangle \to (v_0 v_1 \cdots v_k),$$

这里 $(v_0 v_1 \cdots v_k)$ 为 $S_k(|K|)$ 中的线性连续 k 单形．

显然，如此定义的 γ 为链映射，并且保持增广．当 $f: K \to L$ 为单纯映射时，γ 与 f 导出的链映射可以交换．特别当 K' 为 K 的子复形时，γ 将 $C_k(K_0')$ 映入 $S_k(|K'|)$．因此 γ 导出链映射

$$\overline{\gamma} : C_k(K_0, K_0') \to S_k(|K|, |K'|).$$

21.2 引理 设 K' 为 K 的子复形. 不论 k 为何, 链映射 γ 导出的

(1) $\gamma_* : \tilde{H}_k(C(K_0)) \to \tilde{H}_k(S(|K|))$ 为同构,

(2) $\gamma_* : H_k(C(K_0)) \to H_k(S(|K|))$ 为同构,

(3) $\overline{\gamma}_* : H_k(C(K_0, K_0')) \to H_k(S(|K|, |K'|))$ 为同构.

证明 首先注意, (1) 和 (2) 显然是等价的. 利用正合序列和 5 引理知 (3) 是 (2) (或 (1)) 的推论. 所以只要证明 (1) 就可以了.

我们对 K 的单形数 n 作归纳法.

当 $n = 1$ 时, K 为单点空间, 结论显然成立. 实际上, 当 $\dim K = 0$ 时 γ 本身就已经是同构.

假设 K 的维数 ≥ 1, 且其单形数 $< n$ 时, 引理成立. 考虑 K 有 n 个单形的情形.

设 A 为 K 的一个最高维单形. K 拿掉 A 以后所得到的子复形记为 K'. 那么 K' 的单形数为 $(n-1)$. 于是对于 K' 来讲, 按归纳法, (1), (2), (3) 均成立.

现在考虑可换图

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{H}_k(C(K_0)) & \xrightarrow{\gamma_*} & \tilde{H}_k(S(|K|)) \\
\downarrow i_* & & \downarrow \tilde{i}_* \\
H_k(C(K_0, A_0)) & \xrightarrow{\overline{\gamma}_*} & H_k(S(|K|, |A|)) \\
\cong\uparrow j_* & & \cong\uparrow \tilde{j}_* \\
H_k(C(K_0', \dot{A}_0)) & \underset{\cong}{\xrightarrow{\overline{\gamma_*}}} & H_k(S(|K'|, |\dot{A}|)),
\end{array}$$

其中垂直箭头均由置入映射导出.

上面已经指出, 最下面的 $\overline{\gamma}_*$, 按归纳假设是同构. 注意 $\dot{A} = K' \cap A$, 故由 (21.1) 知 j_* 为同构. 又由 $|\dot{A}| = |K'| \cap |A|$ 及 (19.10), 知 $\tilde{j}_*$ 也为同构. 于是推出上图里面中间的 $\overline{\gamma}_*$ 也是同构. 至于 $i_*(\tilde{i}_*)$ 为同构, 由正合序列及 $A(|A|)$ 为点状的即知. 于是对 K 来讲, (1) 成立. 证明完成. ◁

现在结合 (15.16) 的 $\alpha: C(K) \to C(K_0)$, 考虑合成映射 θ

$$C(K) \xrightarrow{\alpha} C(K_0) \xrightarrow{\gamma} S(|K|).$$

于是由 (15.16) 和 (21.2), 得

21.3　定理　合成链映射 $\theta: C(K) \to C(K_0) \to S(|K|)$ 导出同构

$$\theta_*: H_k(K) \to H_k(S(|K|)),$$

而且当 $f: K \to L$ 为单纯映射时, θ_* 与 f_* 可换.

证明　只要证明后一断言. 但由于 α 和 γ 都和 f 导出的链映射 $f_\#$ 可交换, 因此过渡到同调群仍交换. ◁

至此, 从同调群的角度讲, 限于多面体, 单纯同调群和连续同调群同构. 而且这个同构和多面体间由单纯映射导出的同调群间的同态可换. 但是多面体间的连续映射也导出同调群间的同态, 那么 θ_* 也与这些同态交换吗?

21.4　定理　设 $\varphi: K \to L$ 为映射, 那么它在同调群上所导出的同态 φ_* 与 θ_* 可交换.

证明　为了醒目起见, 将 φ 在连续同调群上导出的同态记为 $S_*(\varphi)$. 那么要证的是

$$S_*(\varphi) \circ \theta_* = \theta_* \circ \varphi_*.$$

按定义 (8.18), $\varphi_* = f_* \circ Sd_*^{(m)}$, 这里 $f: Sd^{(m)}K \to L$ 为 φ 的单纯逼近. 注意 Sd_* 为 π_* 的逆 (7.24). 而 π 为 $1: SdK \to K$ 的单纯逼近, 故在 $\varphi_* = f_* \circ (\pi_*^{(m)})^{-1}$ 中, f 为 φ 的单纯逼近, 而 $\pi^{(m)}$ 为 1 的单纯逼近. 也就是说, 它们都是单纯映射. 因此, θ_* 和它们均可交换, 即

$$\theta_* \circ \varphi_* = \theta_* \circ f_* \circ (\pi_*^{(m)})^{-1} = S_*(f) \circ \theta_* \circ (\pi_*^{(m)})^{-1}$$

$$= S_*(f) \circ (S_*(\pi^{(m)}))^{-1} \circ \theta_*.$$

再来看连续同调群的情形，注意映射和它的单纯逼近是同伦的 (9.2)．而同伦的映射在同调群上导出同一同态 (9.6)．于是由 f 为 φ 的单纯逼近，$\pi^{(m)}$ 为 1 的单纯逼近，知 φ 在连续同调群上所导出的同态 $S_*(\varphi)$ 为 $S_*(f)\circ(S_*(\pi^{(m)}))^{-1}$．于是

$$S_*(\varphi)\circ\theta_* = S_*(f)\circ(S_*(\pi^{(m)}))^{-1}\circ\theta_* = \theta_*\circ\varphi_*. \qquad \lhd$$

至此，我们证明了，限于多面体范畴 (这时射为映射而不是单纯映射)，单纯同调和连续同调是一回事．

仔细检查上面的证明，可以发现，除了同调群是同伦不变量和点状空间 P 的同调群为 $H_n(P)=0, n>0$, $H_0(P)=\mathbb{Z}$ 外，只用到它们都有正合序列和切除性定理成立．因此自然产生一个疑问．是否这些就可以刻画同调论了呢？ Eilenberg 和 Steenrod 给出了正面的回答．也就是说，可以将同调论公理化．

下面就是他们关于同调论的公理叙述．

空间偶上的一个同调论，是对每个空间偶 (X,A) 对应一串群 $H_n(X,A;G)$，又对于偶间映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 对应有一串同态 $H_n(f):H_n(X,A)\to H_n(Y,B), n\in\mathbb{Z}$. 此外，对于偶 (X,A) 还有同态 $\partial_*:H_n(X,A)\to H_{n-1}(A)$. 它们适合：

1) 若 $1:(X,A)\to(X,A)$ 为恒同映射，那么它导出同调群间的恒同同构．

2) $H_n(f\circ g)=H_n(f)\circ H_n(g)$，这里 f,g 为映射．

3) 图

$$\begin{array}{ccc} H_n(X,A) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(Y,B) \\ \partial_*\downarrow & & \downarrow\partial_* \\ H_{n-1}(A) & \xrightarrow{H_n(f|A)} & H_{n-1}(B) \end{array}$$

可换．

4) 列

$$\cdots\longleftarrow H_n(A)\xleftarrow{\partial^*} H_{n+1}(X,A)\xleftarrow{H_{n+1}(j)} H_{n+1}(X)$$

$$\xleftarrow{H_{n+1}(i)} H_{n+1}(A)\longleftarrow\cdots$$

正合，其中 i, j 为置入映射.

5) 如果 $f \sim g$ 则 $H_n(f) = H_n(g)$.

6) 给定 (X, A), 如果 X 的子集 U 使 $\overline{U} \subset \overset{\circ}{A}$, 那么置入映射 $i : (X \backslash U, A \backslash U) \to (X, A)$ 导出同调群间的同构映射.

7) 如果 P 是由一点构成的空间，那么

$$H_n(P) = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ Z, & n = 0. \end{cases}$$

显然我们有

21.5 定理 连续同调群是空间偶 (X, A) 上的一个同调论，即它适合 1)~7).

我们将在 §28 里面证明同调论的唯一性.

§22. 球的连续同调群及其应用

现在我们利用 Mayer-Vietoris 序列来计算球的连续同调群.

按定义，

$$S^n = \left\{ x \left| \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1 \right. \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$
$$S^{n-1} = \{x | x_n = 0\} \subset S^n.$$

22.1 定理 如果以 $z = (0, \cdots, 0, 1)$ 和 $z' = (0, \cdots, 0, -1)$ 分别表示 S^n 的北、南极，则 $U = S^n \backslash \{z\}$ 和 $V = S^n \backslash \{z'\}$ 及 $\mathbb{R}^n$ 均同胚. 又 $U \cap V = S^n \backslash \{z, z'\}$ 和 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 同胚，而 S^n 为 $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ 的形变收缩.

证明 由球极投影立知 $U(V)$ 和 $\mathbb{R}^n$ 同胚，$U \cap V$ 和 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 同胚. 至于 S^n 为 $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ 的形变收缩，可由如下定义的映射

g 而知:

$$g:\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}\to S^n$$

$$(x_0,\cdots,x_n)\mapsto\left(\frac{x_0}{\sqrt{\Sigma x_i^2}},\cdots,\frac{x_n}{\sqrt{\Sigma x_i^2}}\right).$$

◁

22.2 定理 对于零维球面 S^0 而言,

$$\tilde{H}_k(S^0)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & k=0,\\ 0, & k\neq 0.\end{cases}\tag{1}$$

证明 由于 S^0 是两个点，故结论显然成立. ◁

22.3 定理 对于球面 S^n 而言,

$$\tilde{H}_k(S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & k=n,\\ 0, & k\neq n.\end{cases}$$

证明 当 $n=0$ 时，这就是 (22.2).

往下用归纳法，并设 $n\geq 1$.

考虑 S^n 的开覆盖 $U=S^n\backslash\{z\},V=S^n\backslash\{z'\}$(记号同前). 由于 $S^n=\overset{\circ}{U}\cup\overset{\circ}{V}$, 故有约化的 Mayer-Victoris 序列

$$\cdots\to\tilde{H}_k(U)\oplus\tilde{H}_k(V)\to\tilde{H}_k(S^n)\to\tilde{H}_{k-1}(U\cap V)$$

$$\to\tilde{H}_{k-1}(U)+\tilde{H}_{k-1}(V)\to\cdots.$$

注意，由 (22.1), $\tilde{H}_k(U)=\tilde{H}_k(V)=\tilde{H}_k(\mathbb{R}^n)=0,\tilde{H}_k(U\cap V)=\tilde{H}_k(S^{n-1})$, 所以上述正合列及归纳假设给出

$$\tilde{H}_k(S^n)=\tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})=\begin{cases}\mathbb{Z}, & k=n,\\ 0, & k\neq n.\end{cases}$$

◁

22.4 定理 当 $m \neq n$ 时, S^m 和 S^n 不可能有相同的同伦型.

证明 这由它们的同调互异立知. ◁

22.5 定理 对所有的 $n \geq 1$, 我们有

$$H_k(E^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

证明 考虑空间偶 (E^n, S^{n-1}) 的正合同调列

$$\begin{aligned} \cdots \to \tilde{H}_k(E^n) \to H_k(E^n, S^{n-1}) \to \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \\ \to \tilde{H}_{k-1}(E^n) \to \cdots. \end{aligned} \tag{2}$$

由于 $\tilde{H}_k(E^n) = 0$, 所以

$$H_k(E^n, S^{n-1}) = \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

◁

¡ 我们是用 (22.3) 来证明 (22.5) 的. 实际上, 由正合列 (2) 可知它们为等价. 因此给 (22.5) 一个独立的证明不无意义. 下面是这样一个证明.

以 $\triangle_n$ 表示标准 n 单形, $\dot{\triangle}_n$ 为其边界, 那么不妨设 $(E^n, S^{n-1}) = (\triangle_n, \dot{\triangle}_n)$. 以 Λ_n 表示 $\dot{\triangle}_n$ 中除 $F_n^0\triangle_{n-1}$ 这个面以外的所有面所构成的集 (下图中实线所示部分), 即 $\Lambda_n = \{x | x_j = 0$, 某 $j > 0\}$.

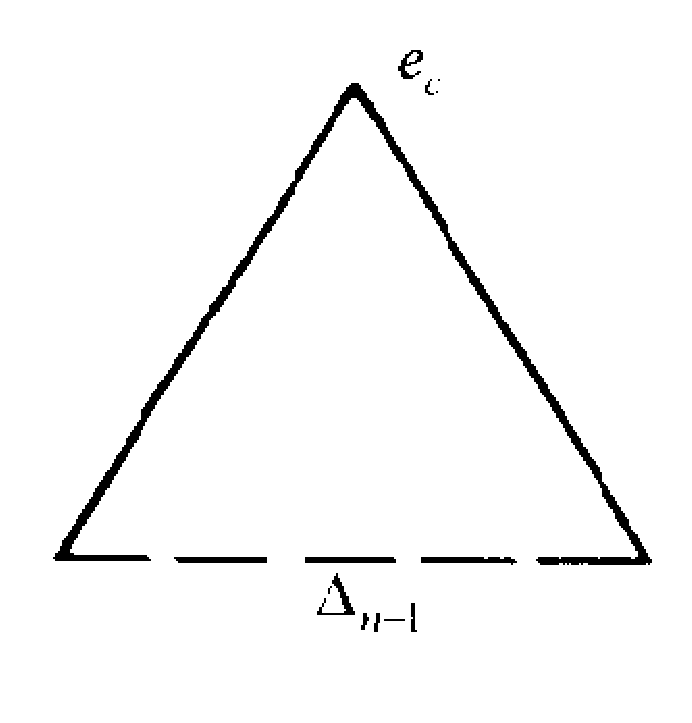


图 5.4

于是

$$H_k(\triangle_n, \dot{\triangle}_n) \xrightarrow[\cong]{\partial} H_{k-1}(\dot{\triangle}_n, \Lambda_n) \xleftarrow[\cong]{i_*}$$

$$\xleftarrow[\cong]{} H_{k-1}(\dot{\triangle}_n \backslash \{e_0\}, \Lambda_n \backslash \{e_0\}) \xleftarrow[\cong]{} H_{k-1}(\triangle_{n-1}, \dot{\triangle}_{n-1}),$$

其中第一个同构是由 $(\triangle_n, \dot{\triangle}_n, \Lambda_n)$ 的正合同调列导出 (因为这时 $H_k\ (\triangle_n,\ \Lambda_n) = 0$), 第二个同构是由切除性, 最后一个则是因为 $(\triangle_{n-1}, \dot{\triangle}_{n-1})$ 为 $(\dot{\triangle}_n \backslash \{e_0\}, \Lambda_n \backslash \{e_0\})$ 的形变收缩. 这样

$$H_k(\triangle_n, \dot{\triangle}_n) = H_{k-1}(\triangle_{n-1}, \dot{\triangle}_{n-1}) = \cdots = H_{k-n}(\triangle_0, \dot{\triangle}_0)$$

$$= H_{k-n}(\triangle_0) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

22.6 定理 对空间 Y, 我们有

$$H_k(E^n \times Y, S^{n-1} \times Y) = H_{k-n}(Y),$$

$$H_k(S^n \times Y, P \times Y) = H_{k-n}(Y),$$

其中 P 为 S^n 的一个点.

证明 和上面 ¡ 中的情形一样, 我们有

$$H_k(E^n \times Y, S^{n-1} \times Y) = H_k((\triangle_n, \dot{\triangle}_n) \times Y)$$

$$\xrightarrow[\cong]{\partial} H_{k-1}((\dot{\triangle}_n, \Lambda_n) \times Y)$$

$$\leftarrow H_{k-1}((\dot{\triangle}_n \backslash \{e_0\}, \Lambda_n \backslash \{e_0\}) \times Y)$$

$$\underset{\cong}{\longleftarrow} H_{k-1}((\Delta_{n-1},\dot{\Delta}_{n-1})\times Y)$$

$$\cong H_{k-2}((\Delta_{n-2},\dot{\Delta}_{n-2})\times Y)$$

$$\cong\cdots\cong H_{k-n}((\Delta_0,\dot{\Delta}_0)\times Y)=H_{k-n}(Y).$$

又由 $(E^{n+1},S^n,P)\times Y$ 的正合列

$$\cdots\to H_{k+1}((E^{n+1},P)\times Y)\to H_{k+1}((E^{n+1},S^n)\times Y)\to$$

$$\to H_k((S^n,P)\times Y)\to H_k((E^{n+1},P)\times Y)\to\cdots$$

和 (E^{n+1},P) 以 (P,P) 为形变收缩，因此它们的同调群为 0 而得证. ◁

22.7 推论 对任意的空间 Y, 我们有

$$H_k(S^n\times Y)\cong H_{k-n}(Y)\oplus H_k(Y).$$

证明 由于投射 $q:S^n\times Y\to Y=P\times Y$ 是收缩映射，因此由 (10.21)[1] 知

$$\begin{aligned}H_k(S^n\times Y)&=H_k(P\times Y)\oplus H_k(S^n\times Y,P\times Y)\\&=H_k(Y)\oplus H_{k-n}(Y).\end{aligned}$$

◁

22.8 推论 对于 $S^m\times S^n$ 而言，有

$$H_k(S^m\times S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & k=0,m,n,m+n,\\ 0, & k\neq 0,m,n,m+n.\end{cases}$$

1) 严格说是用它的证明.

证明　在上述推论中，取 $Y = S^m$ 即得. ◁

在 $m = n$ 时，$\mathbb{Z}$ 重复出现，即

$$H_n(S^n \times S^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

映射 $f : S^n \to S^n$ 导出同态

$$f_* : \tilde{H}_n(S^n) \to \tilde{H}_n(S^n).$$

以 ι_n 表示 $\tilde{H}_n(S^n)$ 的母元，那么 $f_*(\iota_n) = k\iota_n$.

22.9　定义　整数 k 叫做映射 $f : S^n \to S^n$ 的度数，记为 $\deg(f)$.

22.10　命题　度数具有以下的性质：

(i) $\deg(1) = 1$.

(ii) $f \simeq g : S^n \to S^n$, 则 $\deg(f) = \deg(g)$, 即度数为同伦不变量.

(iii) 常值映射的度数为 0.

(iv) $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.

(v) 若 f 为同伦等价，则 $\deg(f) = \pm 1$.

证明　由定义即知. ◁

22.11　命题　如下定义的 (反射)

$$f : S^n \to S^n$$

$$(x_0, \cdots, x_n) \mapsto (-x_0, x_1, \cdots, x_n),$$

其度数为 -1.

证明　先考虑 $n = 0$ 的情形.

这时按定义 $f(x_0) = -x_0$.

v_{-1}　　E^1　　v_1

若 $\tilde{H}_0(S^0) = \text{Ker}\varepsilon$ 的母元取为 $v_1 - v_{-1}$, 那么

$$f_*(v_1 - v_{-1}) = v_{-1} - v_1 = -(v_1 - v_{-1}).$$

所以得证.

往下用归纳法.

设 $k < n$, 结论成立. 现在考虑可换图

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \\ \downarrow f_* & & \downarrow (f|S^{n-1})_* \\ \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}). \end{array}$$

注意, 两个水平箭头由 (22.3) 的证明知为同构. 而按归纳假设, 右端箭头为 "-1". 故得证. ◁

22.12 推论 如下定义的 (反射)

$$g : S^n \to S^n$$

$$(x_0, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \mapsto (x_0, \cdots, -x_i, \cdots, x_n),$$

其度数为 -1.

证明 设 $h : S^n \to S^n$ 为交换 x_0 和 x_i 的映射, 那么它显然是同胚 (实际上 $h^{-1} = h$). 于是由 (22.10) 的 (v), 知 $\deg(h) = \pm 1$. 现在

$$\begin{aligned} \deg(g) &= \deg(h \circ f \circ h) = \deg(h)\deg(f)\deg(h) \\ &= (\deg(h))^2 \deg(f) = \deg(f) = -1. \end{aligned}$$ ◁

22.13 推论 对径映射

$$A : S^n \to S^n$$

$$(x_0, \cdots, x_n) \mapsto (-x_0, \cdots, -x_n)$$

的度数为 $(-1)^{n+1}$.

证明 由于 A 为 $(n+1)$ 个反射 g 的合成, 而每个 g 有度数 -1. 因此 A 的度数为 $(-1)^{n+1}$. ◁

22.14 命题 如果映射 $f: S^n \to S^n$ 和 $g: S^n \to S^n$ 使 $f(x) \neq g(x)$ 对所有的 $x \in S^n$ 成立，那么

$$g \simeq A \circ f.$$

证明 由于 $f(x) \neq g(x)$, 因此可定义

$$F: S^n \times I \longrightarrow S^n$$

$$(x,t) \mapsto \frac{(1-t)A \cdot f(x) + tg(x)}{\|(1-t)A \cdot f(x) + tg(x)\|}.$$

显然 F 是连接 $g(x)$ 和 $A \circ f(x)$ 的同伦. ◁

¡ 由于 $f(x) \neq g(x)$, 所以连接 $A \cdot f(x)$ 和 $g(x)$ 的线段不通过坐标原点，而 F 就是由原点将此线段投射到球上去的映射.

22.15 推论 对映射 $f: S^{2n} \to S^{2n}$, 必有 $x \in S^{2n}$ 使 $f(x) = x$ 或 $f(x) = -x$ 成立.

证明 如果不存在任何 x 使 $f(x) = x = 1 \cdot x$, 那么由 (22.14), 应有 $f \simeq A \cdot 1 = A$. 另一方面，如果也不存在 x 使 $f(x) = -x = Ax$ 成立，那么仍由 (22.14), 有 $f \simeq A \circ A = 1$. 这样 $A \simeq f \sim 1$, 即 $A \sim 1 : S^{2n} \to S^{2n}$. 但由 (22.13), $\deg A = (-1)^{2n+1}$. 而 $\deg 1 = 1 \neq (-1)^{2n+1} = \deg A$. 矛盾！ ◁

22.16 推论 不存在 $f: S^{2n} \to S^{2n}$ 使 x 和 $f(x)$ 对所有的 x 均正交.

证明 如果这种 f 存在，那么对所有的 x 都有 $f(x) \neq x$ 和 $f(x) \neq -x$. 这和 (22.15) 矛盾. ◁

22.17 推论 n 维球面 S^n 上存在连续的切向量场的充要条件为 n 是奇数.

证明 必要性.

由于 S^n 上存在连续的切向量场，也即对 $x \in S^n$, 有 $w(x)$ 使 x 和 $w(x)$ 垂直 (图 5.5). 自原点沿方向 $w(x)$ 可得 S^n 上的一点 $f(x)$, 这样就有

$$f: S^n \to S^n,$$

而 x 和 $f(x)$ 正交. 由 (22.16), 知 n 不能是偶数.

再证充分性.

这时可直接将连续切向量场写出.

$$v: S^{2n+1} \to S^{2n+1}$$

$$(x_0, x_1, \cdots, x_{2n}, x_{2n+1}) \mapsto (-x_1, x_0, \cdots, -x_{2n+1}, x_{2n})$$

◁

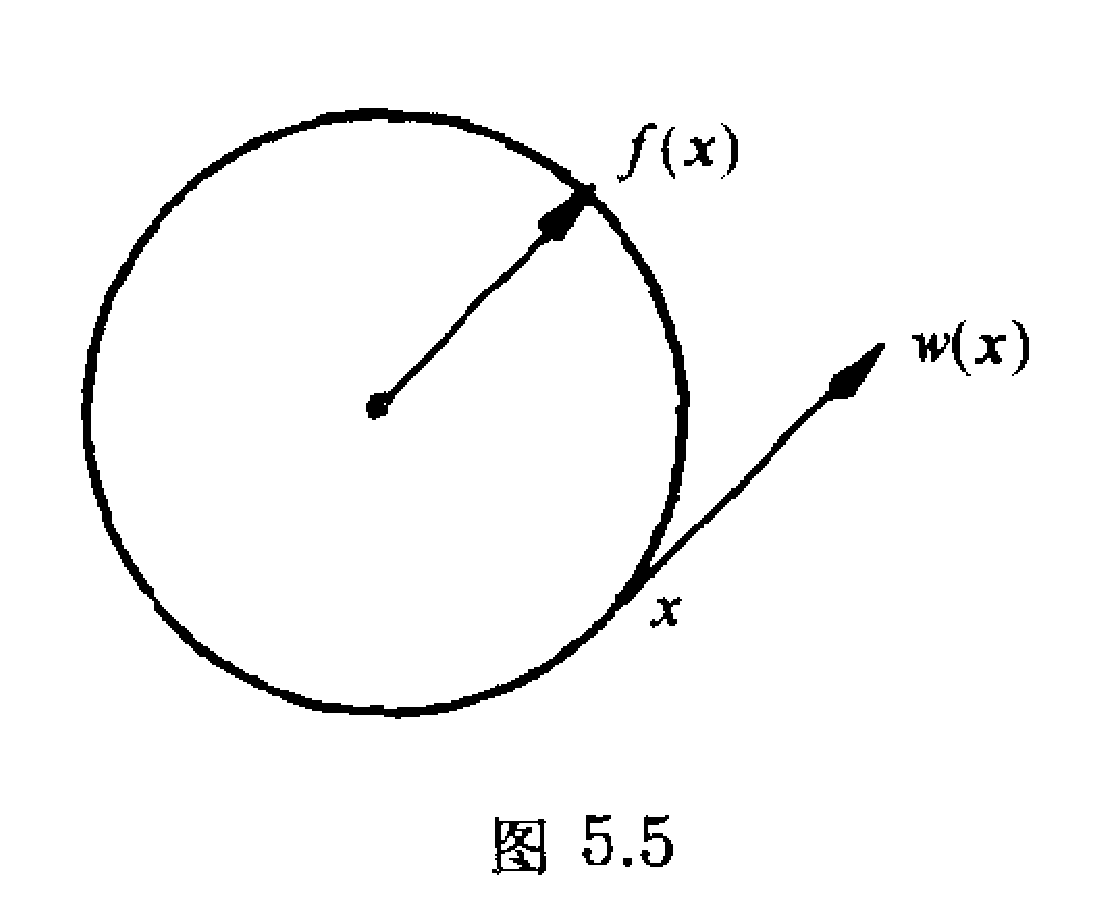


图 5.5

这个推论告诉我们, 只有奇维球面才存在连续的切向量场. 但是这时线性无关的连续切向量场最多可以是几个呢? 这是一个很困难的问题. 它的解答分两部分: 一是估下界, 一是估上界. 前者在 20 世纪 20 年代便已解决, 可后者直到 60 年代才由英国数学家 Adams 完成.

§23. 球上线性无关的切向量场的下界 1)

在推论 (22.17) 的充分性证明中, 实际上我们是将 S^{2n+1} 视为 $\mathbb{C}^{n+1}(=\mathbb{R}^{2n+2})$ 中的单位球面, 然后利用 $\mathbb{C}$ 中的纯虚数 i 乘, 得

1) 本节内容参照林己玄教授的讲义写出, 特此致谢.

$$v : S^{2n+1} \to S^{2n+1},$$

$$(z_0, \cdots, z_n) \mapsto i(z_0, \cdots, z_n) = (iz_0, \cdots, iz_n),$$

这里 $z_k = x_{2k} + ix_{2k+1}, k = 0, \cdots, n$. 由于 $i^2 = -1$, 所以导出的 v 是正交算子.

我们知道复数域是实数域的扩充，即复数可视为实数对 (a, b) 的集合，这时加法用通常的向量加法，乘法如下：

$$(a, b)(a', b') = (aa' - b'', ab' + a'b).$$

而 i 就是 $(0, 1)$.

和复数是实数对一样，四元数域 $\mathbb{B}$ 的元是一对复数 (z_1, z_2), 加法仍沿用向量的加法，而乘法为

$$(z_1, z_2)(z_1', z_2') = (z_1 z_1' - z_2 \overline{z}_2', z_1 z_2' + z_2 \overline{z}_1'),$$

这里 $\overline{z}$ 表示复数 z 的共轭复数. 这时数 $(i, 0), (0, 1), (0, i)$ 若分别记为 i, j, k. 那么

$$\begin{aligned} &i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ &ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \end{aligned} \tag{1}$$

而且 $(1, 0)$ 是 (乘法) 单位 1, 这样每个四元数

$$(z_1, z_2) = (x_0 + ix_1, x_2 + ix_3) = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k.$$

也就是讲， $\mathbb{B} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. 由 (1) 知，在 $\mathbb{B}$ 中用 i, j, k 乘，它们分别导出正交算子，而且彼此独立. 这样和 S^{2n+1} 的情形一样，如果将 S^{4n+3} 视为 $\mathbb{B}^{n+1}$ 中的单位球面，并利用乘 i, j, k, 就得到 S^{4n+3} 上三个线性无关的连续切向量场.

仿照以上产生新数系的办法，我们从四元数系 $\mathbb{B}$ 出发，利用四元数对 (q_1, q_2), 可以得到 Cayley 数系，这时乘法为

$$(q_1, q_2)(q_1', q_2') = (q_1 q_1' - \overline{q}_2' q_2, q_2' q_1 + q_2 \overline{q}_1'),$$

这里 $\overline{q}$ 为 q 的共轭，即 $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ 时，$\overline{q} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$. 这时容易验证除结合律和交换律以外，其他有关域的条件均满足．这样就得到八元代数 $\mathbb{K}$.

以 $\theta_1, \cdots, \theta_7$ 表示 $(i,0),(j,0),(k,0),(0,1),(0,i),(0,j),(0,k)$, 又以

$$\theta_i : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

表示左乘算子．那么易知有

$$\theta_i^2 = -1, \quad \theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq 7.$$

这样，和 S^{2n+1}, S^{4n+3} 类似，对于 S^{8n+7}, 我们得到七个线性无关的连续切向量场.

如果从 Cayley 数对出发，能够得到“16 元数”系，那么上述步骤又可重复．遗憾的是，情况并不如此．因此，只好到此为止．不过，对 $\mathbb{R}^{16} = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$, 可以定义

$$\overline{\theta}_i : \mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$$

$$(a,b) \mapsto (\theta_i a, -\theta_i b), \quad i = 1, \cdots, 7,$$

$$\overline{\theta}_8 : \mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$$

$$(a,b) \mapsto (b, -a).$$

很容易验证，它们适合以下的关系：

$$\overline{\theta}_i^2 = -1, \quad \overline{\theta}_i\overline{\theta}_j + \overline{\theta}_j\overline{\theta}_i = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq 8.$$

于是对 $\mathbb{R}^{16} = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$ 中的单位球面 S^{15}, 我们有八个线性无关的连续切向量场.

总结起来就是

23.1 定理 在空间 $\mathbb{R}^{2^a \cdot k}$ 上，$0 \leq a \leq 3, k = 1, 2, \cdots$, 我们有 $2^a - 1$ 个算子 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2^a-1}$, 它们适合条件

$$\varepsilon_i^2 = -1, \quad \varepsilon_i\varepsilon_j + \varepsilon_j\varepsilon_i = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq 2^a - 1.$$

对于空间 $\mathbb{R}^{16}$, 我们有八个算子 $\overline{\theta}_1,\cdots,\overline{\theta}_8$, 适合

$$\overline{\theta}_i^2=-1,\quad \overline{\theta}_i\overline{\theta}_j+\overline{\theta}_j\overline{\theta}_i=0,\quad 1\le i\ne j\le 8.$$

于是在球面 $S^{2^a k-1}$ 上, 存在 2^a-1 个线性无关的连续切向量场, $a=0,1,2,3,k=1,2,\cdots$. 又 S^{15} 上存在八个线性无关的连续切向量场. ◁

23.2　定理　如果 $\mathbb{R}^n$ 上有 k 个线性算子 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k$, 使

$$\varepsilon_i^2=-1,\quad \varepsilon_i\varepsilon_j+\varepsilon_j\varepsilon_i=0,\quad 1\le i\ne j\le k,$$

那么 $\mathbb{R}^{16n}$ 上有 $(k+8)$ 个这样的算子存在.

证明　已知 $\mathbb{R}^{16}$ 中有算子 $\overline{\theta}_1,\cdots,\overline{\theta}_8$. 现在命

$$\kappa=\overline{\theta}_1\cdots\overline{\theta}_8:\mathbb{R}^{16}\to\mathbb{R}^{16}.$$

那么直接验算即知

$$\kappa\overline{\theta}_i+\overline{\theta}_i\kappa=0,\quad i=1,\cdots,8,$$

又 $\kappa^2=1$. (不是 -1 !)

注意 $\mathbb{R}^{16n}=\mathbb{R}^{16}\otimes\mathbb{R}^n$, 命

$$\varepsilon_i':\mathbb{R}^{16}\otimes\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{16}\otimes\mathbb{R}^n,\qquad i=1,\cdots,k,$$

$$a\otimes b\mapsto\kappa a\otimes\varepsilon_i b,$$

$$\varepsilon_{k+i}':\mathbb{R}^{16}\otimes\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{16}\otimes\mathbb{R}^n,\qquad i=1,\cdots,8,$$

$$a\otimes b\mapsto\overline{\theta}_i a\otimes b,$$

那么由 $\varepsilon_i,\overline{\theta}_i$ 和 κ 的性质, 很容易知道有

$$\varepsilon_i'^2=-1,\quad \varepsilon_i'\varepsilon_j'+\varepsilon_j'\varepsilon_i'=0,\quad 1\le i\ne j\le k+8.$$

所以定理得证. ◁

23.3　推论　当 $n = 2^{a+4b}(2k+1)$ 时，$0 \le a \le 3$, 那么 $\mathbb{R}^n$ 上有 $2^a + 8b - 1$ 个算子 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2^a+8b-1}$，它们适合条件

$$\varepsilon_i^2 = -1, \quad \varepsilon_i\varepsilon_j + \varepsilon_j\varepsilon_i = 0, \quad i \ne j.$$

证明　由于

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2^{a+4b}} \otimes \mathbb{R}^{2k+1},$$

而在 $\mathbb{R}^{2^a}$ 上，由 (23.1) 知有 $2^a - 1$ 个满足要求的算子. 再由 (23.2) 及 $2^{4b} = 16^b$, 知在 $\mathbb{R}^{2^{a+4b}}$ 上有 $2^a - 1 + 8b$ 个满足要求的算子存在. ◁

23.4　推论　当 $n = 2^{a+4b}(2k+1)$ 时，$a = 0, 1, 2, 3, k = 1, 2, \cdots, S^{n-1}$ 上有 $2^a + 8b - 1$ 个线性无关的连续切向量场存在. ◁

§24. Jordan-Brouwer 定理

平面上的一条闭曲线，一定把平面分成两块，而且它们都以这条闭曲线做为公共边. 这就是 Jordan 定理. 这个定理直观上很明显，可是证明并不像乍看那样简单. 至于它的高维推广更不容易. 现在，我们将通过同调群的计算来给它一个证明.

24.1　定理　设 e_r 为方体 I^r 在 S^n 中的同胚像，那么

$$\tilde{H}_k(S^n \backslash e_r) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

证明　我们对 r 做归纳法.

如果 $r = 0$, 那么 e_0 是一个点，于是 $S^n \backslash \{e_0\}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 同胚，结论当然成立.

设 $r < q$ 时，结论成立. 现在来考虑 $r = q$ 的情形.

为了证明

$$\tilde{H}_k(S^n \backslash e_q) = 0,$$

只要证明 $S^n\backslash e_q$ 中的每个 k 维闭链 z^k 一定是边缘链就行了. 设 $\varphi: I^q \to e_q$ 为所说的同胚. 对 $t \in I$, 命 $e_{q-1}(t) = \varphi(t \times I^{q-1})$, 那么 $S^n\backslash e_q \subset S^n\backslash e_{q-1}(t)$, 而且做为 $S^n\backslash e_{q-1}(t)$ 中的 k 维闭链 z^k, 按归纳假定, 是 $S^n\backslash e_{q-1}(t)$ 中的边缘链, 即有 c_t 使 $\partial c_t = z^k$. 注意, 这时 c_t 的承载集全落在紧集 $e_{q-1}(t)$ 之外. 而这个承载集本身也是紧的, 因此它们的距离 $\varepsilon_t > 0$. 再由 φ 在 I^q 上有一致连续性, 故存在 $\delta_t > 0$, 使 I^q 上的任意两点, 只要它们的距离 $< \delta_t$, 则它们在 φ 下的像点的距离 $< \varepsilon_t$.

设 I_t 是以 t 为中心的一个长度 $< 2\delta_t$ 的开区间. 那么 $\tilde{e}_{q-1}(t) = \varphi(I_t \times I^{q-1})$ 的点和 $e_{q-1}(t)$ 的距离 $< \varepsilon_t$, 因此 $\tilde{e}_{q-1}(t)$ 不和 c_t 的承载集有公共点, 因此在 $S^n\backslash \tilde{e}_{q-1}(t)$ 中, z^k 仍为边缘链: $\partial c_t = z^k$.

让 t 变动, 则 $\{I_t\}$ 构成 I 的一个开覆盖. 对这个覆盖, 有 Lebesgue 数 $\rho > 0$, 使每个长度 $< \rho$ 的闭区间, 必属于某个 I_t. 取 M 足够大 (例如 $\frac{1}{M} < \rho$), 考虑如下的闭区间:

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{M}\right], \quad I_2 = \left[\frac{1}{M}, \frac{2}{M}\right], \cdots, I_M = \left[\frac{M-1}{M}, 1\right].$$

命 $\tilde{e}_{q-1,j} = \varphi(I_j \times I^{q-1}), j = 1, \cdots, M$. 则按上述作法, 在 $S^n\backslash \tilde{e}_{q-1,j}$ 中, 有 c_j 使 $\partial c_j = z^k$.

我们的目的是找一个在 $S^n\backslash e_q = S^n\backslash \bigcup_j \tilde{e}_{q-1,j}$ 中的 c 使 $\partial c = z^k$. 为此, 只要证明: 设 J_1, J_2 是 I 的两个闭子区间使 $J_1 \cap J_2 = \{t\}$. 以 e^i 表示 $\varphi(J_i \times I^{q-1}), i = 1, 2$. 那么当 z^k 为 $S^n\backslash(e^1 \cup e^2)$ 中的闭链, 而且在 $S^n\backslash e^i, i = 1, 2$, 中有 c^i 使 $\partial c^i = z^k$, 则在 $S^n\backslash(e^1 \cup e^2)$ 中, 存在 c 使 $\partial c = z^k$.

现在我们用 Mayer-Vietoris 序列来证明它.

设 $X = S^n\backslash e_{q-1}(t), X_i = S^n\backslash e^i, i = 1, 2, A = X_1 \cap X_2 = S^n\backslash(e^1 \cup e^2)$. 由于 X_i 为开集, 因此 $(X; X_1, X_2)$ 为可切除的三

联，因此有下面的 Mayer-Vietoris 序列

$$\cdots \to \tilde{H}_{k+1}(X) \to \tilde{H}_k(X_1 \cap X_2)$$

$$\xrightarrow{(i_{1_*},i_{2_*})} \tilde{H}_k(X_1) \ominus \tilde{H}_k(X_2) \to \tilde{H}_k(X) \to \cdots.$$

注意 $X = S^n \backslash e_{q-1}(t)$, 故由归纳假定， $\tilde{H}_k(X) = 0$. 现在 $S^n \backslash e_q$ 的闭链 z^k 决定 $[z^k] \in \tilde{H}_k(S^n \backslash (e^1 \cup e^2)) = \tilde{H}_k(X_1 \cap X_2)$. 又按假定有 c^i 使 $\partial c^i = z^k$ 在 X_i 中成立， $i = 1, 2$. 于是 $(i_{1_*}, i_{2_*})[z^k] = 0$. 因此由正合性， $[z^k]$ 为 $\tilde{H}_k(X_1 \cap X_2)$ 的零元素. 故有 c 使 $\partial c = z^k$.

这样归纳法完成. ◁

24.2 推论 在 S^n 中拿掉一个 I^r 的同胚象 e^r 以后，余下的部分连通.

证明 这由 $\tilde{H}_0(S^n \backslash e^r) = 0$ 即知. ◁

24.3 定理 设 s_r 为 r 维球面 S^r 在 S^n 中的同胚象，那么

(1) 当 $r \neq n$ 时， r 只能 $< n$, 而且

$$\tilde{H}_k(S^n \backslash s_r) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = n - r - 1, \\ 0, & k \neq n - r - 1. \end{cases} \tag{1}$$

(2) 当 $r = n$ 时， $s_n = S^n$. 即 S^n 不可能和它的真子集同胚.

证明 以 E_r^+, E_r^- 分别表示 S^r 的上、下半球，这时它们的同胚象记为 e_r^+, e_r^-. 那么 s_{r-1} 就是 $E_r^+ \cap E_r^- = S^{r-1}$ 的同胚象. 命 $X = S^n \backslash s_{r-1}, X_1 = S^n \backslash e_r^+, X_2 = S^n \backslash e_r^-, A = X_1 \cap X_2 = S^n \backslash s_r$. 当 $r \neq n$ 时，由 (22.4), 知 S^r 和 S^n 不同胚，因此 $A = S^n \backslash s_r \neq \emptyset$. 于是由 $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2$, 即 $(X; X_1, X_2)$ 为可切除的，得以下的 Mayer-Vietoris 序列

$$\cdots \to \tilde{H}_{k+1}(X_1) \oplus \tilde{H}_{k+1}(X_2) \to \tilde{H}_{k+1}(X)$$

$$\to \tilde{H}_k(A) \to \tilde{H}_k(X_1) \oplus \tilde{H}_k(X_2) \to \cdots.$$

由 (24.1), $\tilde{H}_k(X_1)=\tilde{H}_k(X_2)=0$, 因此上述正合列导出

$$\tilde{H}_{k+1}(S^n\backslash s_{r-1})\cong\tilde{H}_k(S^n\backslash s_r).$$

于是

$$\tilde{H}_k(S^n\backslash s_r)\cong\tilde{H}_{k+1}(S^n\backslash s_{r-1})\cong\cdots\cong\tilde{H}_{k+r}(S^n\backslash s_0).$$

注意 $S^n\backslash s_0=S^n\backslash\{-1,1\}$, 它和 S^{n-1} 有相同的伦型，故

$$\tilde{H}_k(S^n\backslash s_r)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & k+r=n-1,\\ 0, & k+r\neq n-1.\end{cases}$$

于是当 $r>n$ 时, 得 $k=n-1-r<0$. 而由上式 $\tilde{H}_k(S^n\backslash s_r)=\mathbb{Z}$. 不可能，故 (1) 得证.

至于 (2). 若 $s_n\neq S^n$. 那么重复以上讨论, 可知 $\tilde{H}_{-1}(S^n\backslash s_n)=\mathbb{Z}$. 也不可能，故 (2) 得证. ◁

¡ S^n 不与它的真子集同胚与 $\triangle^n$ 可与其真子集同胚，显示了定义在它们上面的映射有完全不同的差别.

24.4 推论 当 $r<n$ 时，在 S^n 中拿掉一个 s_r 使 $S^n\backslash s_r$ 变为不连通的充要条件是 $r=n-1$. 而且这时 $S^n\backslash s_{n-1}$ 恰有两块，并且 s_{n-1} 为它们的公共边界.

证明 由 (1), 我们有

$$\tilde{H}_0(S^n\backslash s_r)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & n-r-1=0,\\ 0, & n-r-1\neq 0.\end{cases}$$

因此有且仅有 $r=n-1$ 时， $\tilde{H}_0(S^n\backslash s_r)$ 为 $\mathbb{Z}$, 即 $S^n\backslash s_{n-1}$ 为两块.

下面证明，这时 s_{n-1} 为它们的公共边界.

由于 $S^n\backslash s_{n-1}$ 恰有两块，设为 C_1 和 C_2, 于是每块均为开集. 这样它们的边界含于 s_{n-1} 中. 现在证明 s_{n-1} 的任意一点 a 均属于它们的公共边界. 为此，只要证明 a 在 S^n 中的任意一个邻域 U, 既包含有 C_1 的点，也包含有 C_2 的点即可.

因为 s_{n-1} 是 S^{n-1} 的同胚象, 因此在 $s_{n-1}\cap U$ 中, 存在一个子集 K, 它既包含 a, 又使 $s_{n-1}\backslash K$ 和 E^{n-1} 同胚. 下面用 e_{n-1} 表示 $s_{n-1}\backslash K$. 于是由 (24.1), 知 $S^n\backslash e_{n-1}$ 只有一块. 现在从 C_1 中任取一点 x_1, 从 C_2 中任取一点 x_2, 那么在 $S^n\backslash e_{n-1}$ 中有一条道路 σ 连接它们. 注意, 这时 σ 和 e_{n-1} 不相交. 又在 $S^n\backslash s_{n-1}$ 中, x_1 和 x_2 处于不同的两块, 因此 σ 应和 s_{n-1} 相交. 由于 $s_{n-1}=K\cup(s_{n-1}\backslash K)=K\cup e_{n-1}$, 故知 σ 和 K 相交, 也即 $\sigma\cap s_{n-1}\subset K\subset U$. 因为 $\sigma\cap s_{n-1}$ 为 σ 的闭子集, 故沿 σ 由 x_1 向 x_2 移动时, 必有第一个进入 $\sigma\cap s_{n-1}\subset U$ 的点 y_1. 这个 y_1 也是第一个离开 C_1 的点, 故 U 包含有在 y_1 之前很近的 σ 的点, 即 U 有 C_1 的点. 考虑最后一个离开 $\sigma\cap s_{n-1}$ 的点 y_2, 那么同理可知 U 有 C_2 的点. 因此得证. ◁

24.5 推论 当 $n\geq 2$ 时, 上述结论在用 $\mathbb{R}^n$ 代替 S^n 时仍然成立. 特别, S^{n-1} 在 $\mathbb{R}^n$ 中的同胚象, 将 $\mathbb{R}^n$ 恰分成两块, 而且它是这两块的公共边界.

证明 这由 $\mathbb{R}^n$ 和 $S^n\backslash\{(0,\cdots,0,1)\}$ 同胚立知. ◁

¡ 1) 当 $n=2$ 时, (24.5) 就是平常所说的 Jordan 曲线定理 (s_1 为 Jordan 曲线). 这时称含有"∞"的那一块为 s_1 的外部, 另一块为内部. 关于 s_1 的内部是否与开球 (即 E^2 的内部) 同胚问题. Schoenflies 定理给出了肯定回答. 但对于 S^3, 类似问题的答案却是否定的. 实际上 Alexander 举"角球"为例, 说明其内部可不与开球同胚 (其实不单连通). 他的这个例稍经改动, 对 $n>3$ 也对.

2) 存在 $\mathbb{R}^2$ 中的一个紧连通子集 K, 它使 $\mathbb{R}^2\backslash K$ 有三块, 而这三块均以 K 为自己的边界.

24.6 定理 设 U_1 和 U_2 是 S^n 中的两个同胚子集, 又 U_1 为开集, 那么 U_2 也是开集.

证明 设 $h:U_1\to U_2$ 是所说的同胚.

为了证明 U_2 是开集, 只要对 U_2 的任意一点 $x_2=h(x_1)$, 证明它是 U_2 的内点即可. 因为 x_1 是开集 U_1 的点, 因此有 x_1 的

邻域 $V_1 \subset U_1$ 使 $(V_1, \partial V_1)$ 和 (E^n, S^{n-1}) 同胚. 命 $h(V_1, \partial V_1) = (V_2, \partial V_2)$. 我们证明 $V_2 \backslash \partial V_2$ 是开集 (显然它在 U_2 中). 这样 x_2 就是 U_2 的内点.

注意, 做为 $E^n \backslash S^{n-1}$ 的同胚象, $V_2 \backslash \partial V_2$ 是连通的. 又 $S^n \backslash V_2$ 由 (24.1) 也是连通的. 所以 $S^n \backslash \partial V_2$ 是两个不相交的连通子集 $V_2 \backslash \partial V_2$ 和 $S^n \backslash V_2$ 的并集. 留意 ∂V_2 是 S^{n-1} 的同胚象, 故由 (24.2), $S^n \backslash \partial V_2$ 是两块. 这两块就是 $V_2 \backslash \partial V_2$ 和 $S^n \backslash V_2$. 因此 $V_2 \backslash \partial V_2$ 为开集. ◁

24.7 推论 上述结论, 在用 $\mathbb{R}^n$ 代替 S^n 时仍然成立. ◁

¡ 上述两推论又称为区域不变性定理.

§25. 局部同调群及其应用

同调群反应空间的整体性质, 可是空间的许多性质, 在局部就表现出不同. 它们理应得到反应. 局部同调群就是这种反应之一.

25.1 定义 设 P 为空间 X 的一个点, 称群 $H_n(X, X \backslash P)$ 为 X 在 P 的第 n 个局部同调群.

25.2 命题 如果 X 为 T_1 空间 (于是 $P = \overline{P}$), V 为 P 的任意一个邻域, 那么

$$H_n(X, X \backslash P) \cong H_n(V, V \backslash P).$$

亦即, 局部同调群可以在 P 的任意一个邻域内计算. 这也说明, 它只和 P 处的局部性质有关.

证明 对于空间偶 $(X, X \backslash P)$ 而言, 由于 $\overline{X \backslash V} = X \backslash \overset{\circ}{V} \subset X \backslash P = X \backslash \overline{P} = (X \backslash P)^\circ$, 故可切除 $X \backslash V$. 于是命题得证. ◁

25.3 推论 如果 X 为 T_1 空间, V 为 P 的邻域, W 为含有 V 的任一集合, 那么

$$H_n(X, X \backslash P) \cong H_n(W, W \backslash P).$$

证明 这只要注意 V 也是 P 在 W 中的一个邻域，因此上式两端均同构于 $H_n(V, V\backslash P)$ 即知. ◁

25.4 推论 如果 T_1 空间 X 和 Y, 分别有点 P 和 Q 以及它们的邻域 U 和 V, 使 (U, P) 和 (V, Q) 同胚，那么

$$H_n(X, X\backslash P) = H_n(Y, Y\backslash Q).$$

证明 由 (25.2), 得

$$H_n(X, X\backslash P) = H_n(U, U\backslash P),$$

$$H_n(Y, Y\backslash Q) = H_n(V, V\backslash Q).$$

而上述两等式的右端相同. 故得证. ◁

25.5 命题 (边缘的不变性) 以 $\mathbb{R}^n_+$ 表示上半平面 $(x_0 \geq 0)$. 如果 $P, Q \in \mathbb{R}^n_+$ 有邻域 U, V 使 (U, P) 和 (V, Q) 同胚，那么 P, Q 或者是同属于边界 $(x_0 = 0)$ 或者是同属于内部 $(x_0 > 0)$.

证明 如果 P 在 $\mathbb{R}^n_+$ 的边界上, 那么 $(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+\backslash P)$ 以 (P', P') 为自己的形变收缩，这里 $P'(\neq P) \in \mathbb{R}^n_+$. 于是

$$H_k(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+\backslash P) = 0.$$

另一方面，对于 $\mathbb{R}^n_+$ 的内点 Q, 由切除性得

$$H_k(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+\backslash Q) \cong H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash Q) = \mathbb{Z}.$$

因此 P, Q 不可能在同胚变换下互相转换. ◁

25.6 命题 如果点 P 有一个点状的邻域 V, 那么

$$H_k(X, X\backslash P) = \tilde{H}_{k-1}(V\backslash P). \tag{1}$$

证明 考虑 $(V, V\backslash P)$ 的正合同调列

$$\tilde{H}_k(V) \to H_k(V, V\backslash P) \to \tilde{H}_{k-1}(V\backslash P) \to \tilde{H}_{k-1}(V).$$

注意，这时按假定 V 为点状的，故上述序列的两端为零，从而

$$H_k(X, X\backslash P) \cong H_k(V, V\backslash P) \cong \tilde{H}_{k-1}(V\backslash P). \qquad \triangleleft$$

¡ 有时就是利用 (1) 的右端来定义局部同调群的.

若复形 K 和 L 均为同一个多面体 P 的剖分，那么 $\dim K = \dim L$ 吗？

下面我们利用局部同调群来证明上述等式成立. 为此，我们需要一些事实.

25.7 命题 对于复形 K 而言，若点 P, Q 使 $\langle P\rangle = \langle Q\rangle$，那么 $(|K|, |K|\backslash P)$ 和 $(|K|, |K|\backslash Q)$ 同胚，因此 $|K|$ 在 P 和 Q 的局部同调群同构.

证明 在对 K 做重心重分时，以 P 代 $\langle \overset{*}{P}\rangle$ 进行操作，所得的重分记为 Sd_PK. 类似的，以 Q 代 $\langle \overset{*}{P}\rangle$ 进行操作，所得的重分记为 Sd_QK. 那么除 P 和 Q 外，Sd_PK 和 Sd_QK 的顶点一致. 现在定义一个单纯映射 f，它将 P 映为 Q，别的顶点不动. 显然 f 就是所需的同胚，故命题得证. ◁

25.8 命题 设 K 为 n 维复形，P 为其一点. 那么

$$H_i(|K|, |K|\backslash P) = 0, \quad i > n.$$

证明 由 (25.7)，不妨设 P 为 $\langle P\rangle$ 的重心. 即 P 为 SdK 的顶点. 于是

$$H_i(|K|, |K|\backslash P) = H_i(|SdK|, |SdK|\backslash P) = H_i(|\overline{St}P|, |\overline{St}P|\backslash P),$$

这里 $\overline{St}P$ 是 SdK 中所有以 P 为一个顶点的单形的并，显然它包含有星形 StP. 而 StP 为开集，因此由 (25.2)，上式成立.

现在注意，$\overline{St}P$ 可以视为 SdK 的子复形，故至多为 n 维. 又上面的同调群，按定义为连续同调群，但限于多面体，它也是复形 $\overline{St}P$ 的 (有向) 同调群，故当 $i > n$ 时为零. ◁

25.9 定理 复形 K 的维数是 $|K|$ 的拓扑不变量，因为我们有

$$\dim K = \max\{i|H_i(|K|, |K|\backslash P) \neq 0, P \text{ 任意}\}.$$

证明 (25.8) 说 $\max\{i\} \leq \dim K$. 现在证明反方向的不等式成立. 为此取 $P = \overset{*}{A}$, 这里 A 为 K 的任一 n 单形.

现在 $\overset{\circ}{A}$ 为 P 在 $|K|$ 中的邻域, 故由 (25.3), 得

$$H_n(|K|, |K|\backslash P) = H_n(A, A\backslash P).$$

但 A 为 n 维单形，故 $A\backslash P$ 以 S^{n-1} 为自己的收缩，故

$$H_n(A, A\backslash P) = H_{n-1}(A\backslash P) = H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z} \neq 0.$$

第六章 CW 空间的同调论

我们在第一章里面, 对于可剖分的空间, 介绍了单纯同调论. 在第五章里面, 对一般的拓扑空间, 介绍了连续同调群. 于是对于可剖分空间来说, 它既可有单纯同调群, 又可有连续同调群. 那么它们是否一致呢? 这是一.

再者, 对于连续同调群而言, 由于链复形很大, 所以它的决定只能通过 Mayer-Vietoris 序列等来进行. 因此变得很困难. 而单纯同调群, 虽说对于可剖分空间来讲, 它的决定我们有一定的格式可以遵循. 但正如所举的例那样, 在许多场合是相当繁复的. 而这种繁复显然是"人为的". 例如, 从同调的角度讲, 球面应该只有 0 维和 n 维有东西. 实际上, 我们将 S^n 视为由一个点 (0 维) 和一个 n 维胞腔 (n 维) 组成是很自然的. 只是这时 n 维胞腔的边界和 0 维胞腔 (点) 叠合. 又如投影平面, 它是由叠合圆盘 (2 维胞腔) 的对径点而成. 因此将它看成是由一个点 (0 维), 一个 1 维胞腔 (圆盘的半个边界) 和一个 2 维胞腔 (圆盘) 组成比较自然. 只是这时 1 维胞腔的两个端点 (和 0 维胞腔) 叠合为一. 又 2 维胞腔的边界, 也是成对的 (对径点) 与 1 维胞腔的相应点叠合. 再如环面, 从同调的角度看, 它在 0 维和 2 维各有一个 (母) 元, 在 1 维有两个 (母) 元, 这正好和它是由四个角点叠合为一点 (0 维), 上、下边叠合为一条边, 左、右边叠合另一条边, 以及余下的 2 维胞腔这四者组成相符. 因此一定要把空间剖分为复形是太过于拘谨.

从上面的例子可以看出, 这时高维胞腔的边界, 不再像复形的情形, 高维单形的边界一定要通过同胚添加到低一维的骨架上. 而是通过一个映射 (叠合某些点) 添加上去. 而且这时骨架的维数也不一定只低一维 (S^n 就是这样). 所有这些, 都由英国数学家 J. H. C. Whitehead 总结在他所引进的 CW 空间中. 这种空间, 不

仅在同调群的计算上，较之用复形来算可剖分空间的同调群为简捷，而且对它们来讲，两种同调群一致. 除了这些优点以外，它们既将常见的、有用的空间包容在内，而且很适宜于代数拓扑中各种技巧的施展. 因此， CW 空间已经构成一类重要的空间类.

§26. 贴附空间

如上所述， CW 空间是由叠合某些点而成. 因此我们先从商空间讲起.

26.1 定义 设 A_i 为集 X 的子集， $i \in I$. $X^* = \{A_i\}$ 称为 X 的一个 **分解**, 如果 $X = \bigcup_i A_i$, 且 $i \neq j$ 时， $A_i \cap A_j = \emptyset$.

26.2 命题 若 $X^* = \{A_i\}$ 为 X 的一个分解，那么它决定 X 中的一个等价关系 $\sim$ 如下： $x \sim x'$ 当且仅当 x, x' 同属于某个 A_i. 反之亦真.

证明 请读者自行补出. ◁

26.3 定义 设空间 X 有一个分解 $X^* = \{A_i\}$. 满函数 $\pi : X \to X^*$ 是将 x 映入它所在的 A_i. 现在规定 X^* 的拓扑如下： U 为 X^* 的开集，如果 $\pi^{-1}(U)$ 为 X 中的开集，这个拓扑叫做 **商拓扑**. 具有商拓扑的 X^* 叫做 **商空间**. 也称 X^* 是将“分解中的每个点叠合为一点”而得.

i) 1) 引用商拓扑以后， $\pi : X \to X^*$ 连续且满，称为 **商映射**.

2) 由于分解等价于等价关系“$\sim$”(16.2), 因此商空间 X^* 有时也记为 $X/\sim$. 这时 $\pi : X \to X/\sim$ 将每个点 x 映为它所在的等价类 $[x]$. 当 A 为 X 的子集时，用 X/A 表示这样的一个商空间 $X/\sim$, 这时 $a \sim a'$ 当且仅当 $a, a' \in A, X \backslash A$ 中的点只与自己等价. 因此 X/A 是在 X 中将 A 的点叠合为一点所得的商空间.

26.4 例 $S^n = E^n/S^{n-1}$, 这里 S^{n-1} 为 E^n 的边界.

26.5　例　环面为 $I \times I/\sim$, 这里 $(x,0) \sim (x,1)$ $x \in I$, 又 $(0,y) \sim (1,y)$ $y \in I$. 其它点只与自己等价.

26.6　定义　满映射 $f: X \to Y$ 叫做 **叠合映射**, 如果 Y 的子集 U 为开, 当且仅当 $f^{-1}(U)$ 在 X 中为开.

26.7　例　商映射 $\pi: X \to X^*$ 为叠合映射.

反过来, 如果 $f: X \to Y$ 为叠合映射, 那么 Y 可以视为商空间, 实际上利用 f 在 X 中定义一个等价关系 "$\sim$" 如下: $x \sim x'$ 当且仅当 $f(x) = f(x')$. 于是有商空间 $X/\sim$.

26.8　命题　Y 和 $X/\sim$ 同胚.

证明　命

$$\alpha: Y \to X/\sim$$

$$y \mapsto \pi(x) = [x],$$

这里 $x \in X$ 使 $f(x) = y$. 显然 $\alpha(y) = [x]$ 与适合 $f(x) = y$ 的 x 的选取无关, 而完全由 y 决定, 故 α 定义合理.

显然, $\alpha(f(x)) = \pi(x), x \in X$.

为了证明 α 连续. 只要对 $X/\sim$ 中的开集 U, 证明 $\alpha^{-1}(U)$ 为 Y 的开集即可. 但按定义, $\alpha^{-1}(U)$ 为 Y 的开集, 当且仅当 $f^{-1}(\alpha^{-1}(U))$ 为 X 中开集. 而 $f^{-1}(\alpha^{-1}(U)) = \pi^{-1}(U)$, π 连续, 所以 $\pi^{-1}(U)$ 为 X 中开集, 这样 α 连续.

再命

$$\beta: X/\sim \to Y,$$

$$[x] \mapsto f(x).$$

显然, β 的定义, 与 x 在 $[x]$ 中的选取无关. 而且

$$\beta(\pi(x)) = f(x), \quad x \in X,$$

成立. 利用此式, 可像上面那样证明 β 连续.

显然, α 和 β 互逆, 因此 $X/\sim$ 和 Y 同胚. $\lhd$

下面来考虑 $X/\sim$ 的分离性.

很容易知道，当 X 为 Hausdorff 空间时，$X/\sim$ 不一定也是 Hausdorff 空间. 例如 $\dfrac{[-1,1]}{x\sim -x(x\neq 1)}$ 就无法使 -1 和 1 分离. 我们要找一个保证 $X/\sim$ 是 Hausdorff 的条件.

26.9 定义 空间 Y 的 **对角线** 是 $Y\times Y$ 的如下子集:

$$D=\{(y,y)|y\in Y\}.$$

26.10 命题 空间 Y 是 Hausdorff 空间, 当且仅当 D 为 $Y\times Y$ 的闭子集.

证明 留做习题. ◁

26.11 定义 若 $\sim$ 为空间 X 中的等价关系, 那么 $\sim$ 的 **图**

$$G=\{(x_1,x_2)|x_1\sim x_2\}\subset X\times X.$$

当 $\sim$ 的图 G 为 $X\times X$ 的闭子集时, 称 $\sim$ 为 **闭的**.

26.12 命题 空间 X 为 Hausdorff 空间, 当且仅当 X 里的恒等关系为闭的.

证明 本命题实际上就是 (26.10). ◁

26.13 命题 设 $\sim$ 为 X 的一个等价关系, $\triangle$ 是 $X/\sim$ 的对角线, $\pi: X\to X/\sim$ 是商映射, 那么 $\sim$ 的图

$$G=(\pi\times\pi)^{-1}(\triangle).$$

证明 显然. ◁

26.14 命题 设 $\sim$ 为 X 中的等价关系. 如果 $X/\sim$ 为 Hausdorff 空间的话, 则 $\sim$ 为 X 中的闭关系.

证明 因为 $X/\sim$ 是 Hausdorff 空间, 因此它的对角线 $\triangle$ 是 $X/\sim\times X/\sim$ 中的闭集 (26.10). 又 $\pi\times\pi: X\times X\to X/\sim\times X/\sim$ 连续, 因此 $(\pi\times\pi)^{-1}(\triangle)=G$ 是 $X\times X$ 中的闭集. 故按定义 (26.11), $\sim$ 为 X 中的闭关系. ◁

26.15 命题 设 X 为紧 Hausdorff 空间，于是当 $\sim$ 为 X 中的闭关系时， $X/\sim$ 是 (紧)Hausdorff 空间.

证明 注意，紧 Hausdorff 空间里的子集是闭集，当且仅当它是紧的.

先证明 π 为闭映射，即：若 K 为 X 的闭子集，则 $\pi(K)$ 为 $X/\sim$ 里的闭子集. 为此，只要证明 $\pi^{-1}(\pi(K))$ 为 X 的闭集即可.

注意

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(K)) &= \{y| \in X, \quad k \in K, k \sim y\} \\ &= p_2(p_1^{-1}(K) \cap G).\end{aligned}$$

这里 $p_i : X \times X \to X$ 为到第 i 个因子的投射， $i = 1, 2$. 又 G 为 $\sim$ 的图. 现在 $p_1^{-1}(K) \cap G$ 为闭集, 故紧. 因此 $p_2(p_1^{-1}(K) \cap G) = \pi^{-1}(\pi(K))$ 也是紧集，故 π 为闭映射.

现在来证明命题的结论： $X/\sim$ 为 Hausdorff 空间.

设 $[x], [y]$ 为 $X/\sim$ 的两个互异点. 由于它们是 X 中点 x 和 y 的象，而 x, y 为 X 中闭集，因此由 π 为闭映射，知它们都是 $X/\sim$ 中的闭集. 于是 $\pi^{-1}([x])$ 和 $\pi^{-1}([y])$ 都是 X 中闭集，而且不相交. 由于 X 为紧 Hausdorff 空间，故为法空间. 这样 $\pi^{-1}([x])$ 和 $\pi^{-1}([y])$ 分离. 即有 X 的不相交开集 U 和 V 存在，使 $U \supset \pi^{-1}([x]), V \supset \pi^{-1}([y])$. 考虑 $X/\sim$ 中的 $\pi(X \backslash U)$ 和 $\pi(X \backslash V)$，由于 π 为闭映射，故它们都是闭集. 于是它们 (在 $X/\sim$ 中) 的余集是开集，而且分别包含 $[x]$ 和 $[y]$. 因此， $X/\sim$ 为 Hausdorff 空间. $\lhd$

以上介绍了如何从等价关系做商空间 $X/\sim$，也讨论了在什么条件下，商空间 $X/\sim$ 是 Hausdorff 空间.

为了决定空间 X 的一个等价关系 $\sim$，我们可以从 X 的一个二元关系 R[1] 出发，按如下的办法就可以得到 X 的一个等价关

1) R 为 $X \times X$ 的一个子集.

系 $\sim$: $x \sim x'$ 当且仅当存在 $x_i \in X, i = 1, \cdots, n(n \in \mathbb{Z})$, 使 $x = x_1, x' = x_n$, 又

(i) $x_{i+1} = x_i$,

或

(ii) $(x_{i+1}, x_i) \in R$,

或

(iii) $(x_i, x_{i+1}) \in R$.

26.16 **例** 考虑 n 维球面 S^n 中的一个二元关系 $\{(x, -x)\}$. 由它产生的等价关系记为 $\sim$. 那么 $\sim$ 的图 G 由对角线 D 和 $D' = \{(x, -x)\}$ 组成. 显然它是闭集, 因此 $S^n/\sim$ 是紧 Hausdorff 空间. 这个空间是 n 维 **实投影空间** $\mathbb{R}P^n$.

26.17 **例** 和实投影空间类似, 我们可以做 n 维 **复投影空间**$\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/\sim$. 这里 $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}(= \mathbb{C}^{n+1})$ 为单位球面, 它是

$$\{(z_0, \cdots, z_n) | \sum_i |z_i|^2 = 1\},$$

而 $(z_0, \cdots, z_n) \sim (z'_0, \cdots, z'_n)$, 如果有 $\lambda \in \mathbb{C}$, 使 $|\lambda| = 1$ 和 $z'_i = \lambda z_i, i = 0, \cdots, n$ 成立. 显然 $\sim$ 的图为闭集. 故 $\mathbb{C}P^n$ 也是紧 Hausdorff 空间.

26.18 **例** 用复数代替实数, 我们仿照实投影空间的作法得复投影空间. 同样, 用四元数系 $\mathbb{B}$ 来代替 $\mathbb{C}$, 我们有 **四元数投影空间**$\mathbb{B}P^n = S^{4n+3}/\sim$, 这时 $S^{4n+3} \subseteq \mathbb{R}^{4n+4}(= \mathbb{B}^{n+1})$ 为 $\{(q_0, \cdots, q_n) | \sum_i q_i \bar{q}_i = 1, q_i \in \mathbb{B}\}$, 而 $(q_0, \cdots, q_n) \sim (q'_0, \cdots, q'_n)$, 如果存在 $\xi \in \mathbb{B}$, 使 $\xi\bar{\xi} = 1$, $q_i = \xi q'_i, i = 0, \cdots, n$. 显然, $\sim$ 的图为闭集, 故 $\mathbb{B}P^n$ 也是紧 Hausdorff 空间.

26.19 **定义** 映射 $f : X \to Y$ 和 $g : X \to Y$ 叫做 **相对于** $A(\subset X)$ **同伦**, 记为 $f \simeq g : X \to Y(\mathrm{rel}A)$, 如果存在映射 $F : X \times I \to Y$ 使 $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x), F(a, t) = f(a), x \in X, t \in I, a \in A$. (故 $f(a) = g(a), a \in A$.)

26.20 定义 子空间 A 叫做是空间 X 的一个 **强形变收缩**, 如果有 $r: X \to A$ 使 $ri = 1_A: A \to A, ir \simeq 1_X: X \to X(\text{rel}A)$.

26.21 定义 空间偶 (X, A) 叫做是 **有带偶**, 如果

1) X 为 Hausdorff 空间, A 为其闭子集;

2) $X\backslash A$ 的点和 A 可分离, 即对 $X\backslash A$ 的任意一点 x, 存在不相交的开集 U 和 V, 使 $x \in U, A \subset V$. (注意, 这时由 $U \cap V = \emptyset$, 知 $U \cap A = \emptyset$, 故 $U \subset X\backslash A$.)

3) A 在 X 中有 "带" B, 即 B 为 A 的邻域, 而 A 为 B 的强形变收缩.

26.22 定义 给定空间偶 (X, A) 和映射 $f: A \to Y$. 在拓扑和 $X \amalg Y$ 中有一个二元关系 $R = \{(a, f(a)) | a \in A\}$. 由它产生的等价关系记为 $\sim$. 那么我们有商空间 $Z = X \amalg Y/\sim$, 记为 $X \smile_f Y$, 叫做 $(X \supset) A \xrightarrow{f} Y$ 的 **贴附空间**. 这时称自然映射 $\overline{f}: X \to X \smile_f Y$ 为 **特征映射**, f 为 **贴附映射**. 当 $(X, A) = (E^n, S^{n-1})$ 时, 称 $Z = E^n \smile_f Y$ 为 **用 f 添一个 n 胞腔于** Y. 也称为 f 的 **映射锥**.

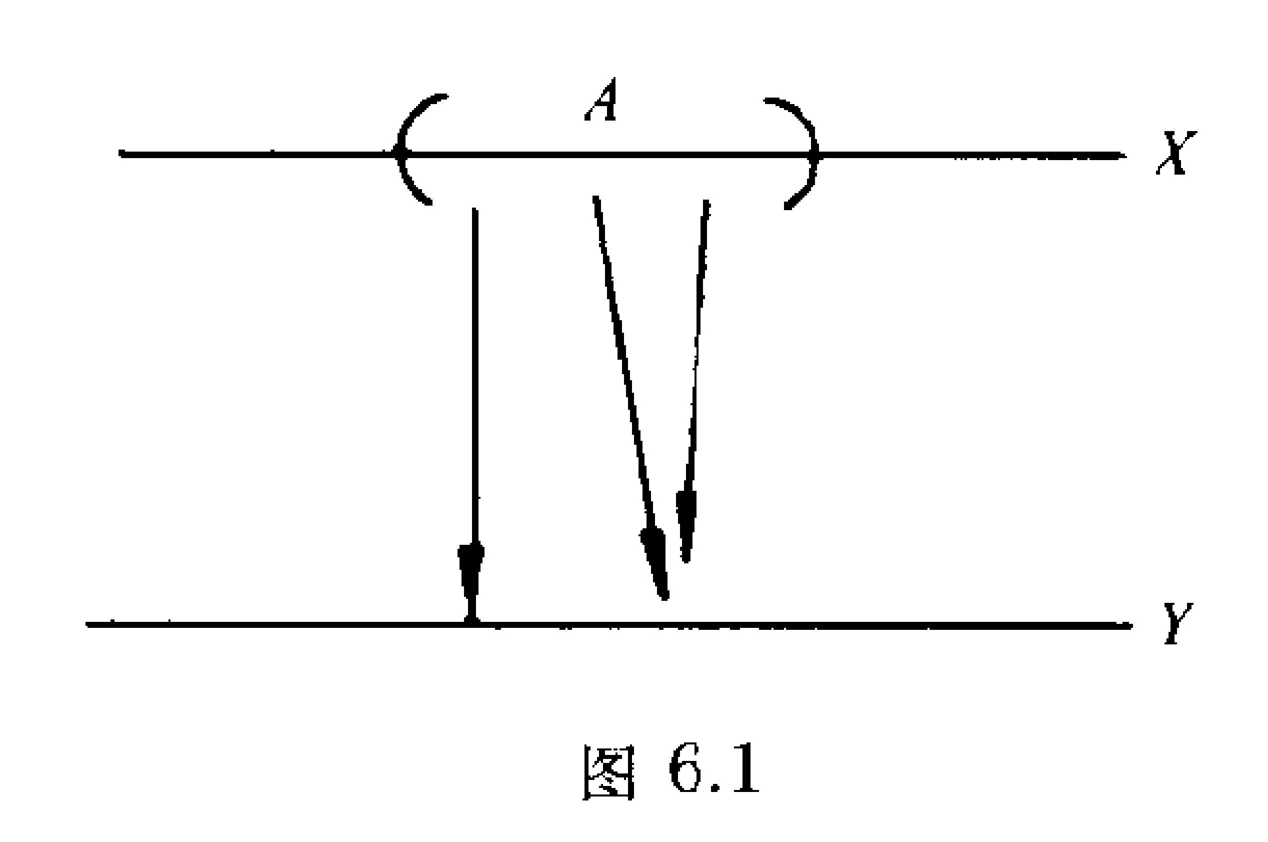


图 6.1

26.23 例 (E^n, S^{n-1}) 就是一个有带偶.

(CX, X) 也是一个有带偶, 这里 $CX = X \times I / X \times \{0\}$, 即将 $X \times I$ 中的子集 $X \times \{0\}$ 叠合为一点所得的商空间. 有时也称它为 X 上的锥.

26.24 命题 如果 (X, A) 为有带偶, Y 为 Hausdorff 空间, $f: A \to Y$. 那么 $(X \smile_f Y, Y)$ 也是一个有带偶. 实际上, 当 B

为 A 的带时，$Y \smile \overline{f}(B)$ 就是 Y 的带. 而且 $\overline{f}$ 同胚地映 $X-A$ 为 $X \smile_f Y - Y$. (这时也称 $\overline{f}:(X,A)\to(X\smile_f Y,Y)$ 为相对同胚 [1].)

证明 以 $\pi: X \amalg Y \to X \smile_f Y = Z$ 表示商映射 (于是 $\overline{f}=\pi|X$). 则由 $X\backslash A = \pi^{-1}(Z\backslash Y)$ 为 $X\amalg Y$ 中开集，知 $Z\backslash Y$ 为 Z 中开集. 于是有带偶的条件 1) 中关于 Y 为闭子集部分成立，而且 $\overline{f}:(X,A)\to(Z,Y)$ 为相对同胚.

若 B 为 A 在 X 中的一个带, 那么由 $Y\smile\overline{f}(B)=\pi(B\amalg Y)$ 及 $B\amalg Y = \pi^{-1}(\pi(B\amalg Y)) = \pi^{-1}(Y\smile\overline{f}(B))$ 为 $X\amalg Y$ 中的开集，知 $Y\smile\overline{f}(B)$ 为 Z 中开集. 显然它包含 Y. 下面，我们利用 A 为 B 的强形变收缩这个条件，即这时存在

$$F: B\times I \to B$$

使 $F(a,t)=a, a\in A, t\in I, F(b,0)=b, F(b,1)\in A, b\in B$. 命

$$\overline{F}:(Y\smile\overline{f}(B))\times I \to Y\smile\overline{f}(B)$$

为

$$\overline{F}(z,t)=\begin{cases} z, & z\in Y \\ \overline{f}(F(b,t)), & z=\overline{f}(b), b\in B\backslash A. \end{cases}$$

那么 $\overline{F}$ 的定义是一意的，而且它为 $(B\amalg Y)\times I$ 上某个映射的商映射，故连续. 此 $\overline{F}$ 的存在表明 $Y\smile\overline{f}(B)$ 为 Y 的一个带，即 3) 成立.

再来证 2). 对 $z\in Z\backslash Y$, 设 $z=\overline{f}(x)$. 按假定, 对 $x\in X\backslash A$, 有不相交的开集 U 和 V, 使 $x\in U$, $A\subset V$. 于是 Z 的开集 $\overline{f}(V)\smile Y$ 和 $\overline{f}(U)$ 分离 Y 和 $\overline{f}(x)=z$. 这样 2) 也成立.

---

1) 一般而言，称 $\varphi:(X,A)\to(Y,B)$ 为相对同胚，如果 $\varphi|X-A:(X-A)\to(Y-B)$ 为同胚.

剩下的是证明 1) 中关于 Z 为 Hausdorff 空间这一部分. 这时分三种情况.

i) 给定的 z_1, z_2 都在 $Z\backslash Y$ 中. 这时由于 $Z\backslash Y$ 为开集, 且与 X 中的开集 $X\backslash A$ 同胚, 因此 z_1, z_2 可分离.

ii) 给定 $z_1 \in Y, z_2 \notin Y$. 于是 $z_2 \in Z\backslash Y$. 上面已经证明 z_2 和 Y 可分离, 因此 z_2 和 z_1 也可分离.

iii) 给定的 z_1, z_2 都为 Y 的点. 这时由 Y 为 Hausdorff 空间, 知有 Y 中开集 Y_1 和 Y_2 分离 z_1 和 z_2(注意 $\pi(Y_1)$ 和 $\pi(Y_2)$ 不一定是 Z 中开集, 而且以下的论证正是由此引起). 命 $r = F|B \times 1 : B \to A, B_i = r^{-1}(f^{-1}(Y_i))$. 那么 B_i 为 B 中的开集, $i = 1, 2$, 因此也是 X 中的开集. 这样 $Y_i \smile \overline{f}(B_i), i = 1, 2$, 为 Z 中不相交的开集, 它们分离 z_1 和 z_2. ◁

26.25 命题 设 X, Y, Z 都是紧 Hausdorff 空间, A 为 X 的闭子集. $f : A \to Y$ 产生 $X \smile_f Y = X \amalg Y/\sim$. 若有 $g : X \amalg Y \to Z$ 使 g 为满, 且 $u \sim u'$ 当且仅当 $g(u) = g(u')$. 那么 Z 和 $X \smile_f Y$ 同胚.

证明 以 $\pi : X \amalg Y \to X \smile_f Y$ 表示商映射, 则如上的 g 导出一个对应 $k : X \smile_f Y \to Z$, 使图

$$\begin{array}{ccc} X \amalg Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \pi \searrow & & \nearrow k \\ & X \smile_f Y & \end{array}$$

可换. 显然 k 为一一的满对应. 现在我们来证明 k 连续. 设 U 为 Z 的开子集. 要证明的是 $k^{-1}(U)$ 为开集, 即 $\pi^{-1}k^{-1}(U)$ 为开集. 但 $\pi^{-1}k^{-1}(U) = g^{-1}(U)$, 而 g 连续, 因此 $g^{-1}(U) = \pi^{-1}k^{-1}(U)$ 为开集.

再由 $X \smile_f Y$ 和 Z 都是紧 Hausdorff 空间, 知 k 为同胚. 命题得证. ◁

¡ 这个命题, 为我们验证某个空间是否为贴附空间提供了手段.

26.26 例 $S^n = E^n \smile_f P$, 这里 P 为一个点所构成的空间, 而 $(X, A) = (E^n, S^{n-1})$, f 是常值映射.

26.27 例 n 维实投影空间 $\mathbb{R}P^n = S^n/\sim$ 为贴附空间.

以 $\pi_n : S^n \to \mathbb{R}P^n$ 表示商映射, 那么 $\mathbb{R}P^n = E^n \smile_{\pi_{n-1}} \mathbb{R}P^{n-1}$.

实际上, 将 $S^{n-1} = \{(x_0, \cdots, x_{n-1})\}$ 视为 S^n 的赤道 $\{(x_0, \cdots, x_{n-1}, 0)\}$, 那么有自然的 $i : \mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}P^n$. 又记 S^n 的上半球为 E^n_+. 那么有

$$E^n_+ \supset S^{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \mathbb{R}P^{n-1}.$$

现在定义映射

$$g : E^n_+ \amalg \mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}P^n,$$

$$g|E^n_+ : E^n_+(\subset S^n) \xrightarrow{\pi_{n-1}} \mathbb{R}P^n,$$

$$g|\mathbb{R}P^{n-1} : \mathbb{R}P^{n-1} \xrightarrow{i} \mathbb{R}P^n.$$

显然可知, g 和 π_{n-1} 适合 (26.25) 的条件, 故 $\mathbb{R}P^n = E^n \smile_{\pi_{n-1}} \mathbb{R}P^{n-1}$.

26.28 例 n 维复投影空间 $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/\sim$ 为贴附空间.

以 $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/\sim$ 表示商映射, 那么

$$\mathbb{C}P^n = E^{2n} \smile_\pi \mathbb{C}P^{n-1}.$$

和实的情形类似. 命 $i : \mathbb{C}P^{n-1} \to \mathbb{C}P^n$ 是由自然的包含关系 $S^{2n-1} \subset E^{2n} \subset S^{2n+1}$ 所导出, 这里 $E^{2n} = \{(z_0, \cdots, z_{n-1}, x) | 0 \leq x \leq 1, \Sigma|z_i|^2 + x^2 = 1\}$. 于是有

$$E^{2n} \supset S^{2n-1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^{n-1}.$$

再定义映射

$$g : E^{2n} \amalg \mathbb{C}P^{n-1} \to \mathbb{C}P^n,$$

$$g|E^{2n}: E^{2n}(\subset S^{2n+1}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^n,$$

$$g|\mathbb{C}P^{n-1}: \mathbb{C}P^{n-1} \xrightarrow{i} \mathbb{C}P^n.$$

这样, g 和 π 适合 (26.25) 的条件, 故 $\mathbb{C}P^n = E^{2n} \smile_\pi \mathbb{C}P^{n-1}$.

当 $n=0$ 时, $S^{2n+1} = S^1$ 上的点彼此等价, 因此 $\mathbb{C}P^0 = P$. 这样 $\mathbb{C}P^1 = E^2 \smile_\pi P = S^2$. 投射

$$\pi: S^3 \longrightarrow S^3/\sim = \mathbb{C}P^1 = S^2$$

通常记为 h, 叫做 Hopf 映射.

26.29　例　四元数投影空间 $\mathbb{B}P^n = S^{4n+3}/\sim$ 为贴附空间.

以 $\pi: S^{4n+3} \to \mathbb{B}P^n = S^{4n+3}/\sim$ 表示商映射, 则

$$\mathbb{B}P^n = E^{4n} \smile_\pi \mathbb{B}P^{n-1}.$$

它的证明和前相似, 这里就省略了.

¡ 这时有另一个 Hopf 映射 $\pi: S^7 \to S^7/\sim = \mathbb{B}P^1 = S^4$.

26.30　例　我们已有实投影空间, 复投影空间和四元数投影空间. 那么是否会有八元数投影空间呢? 由于八元数代数 $\mathbb{K}$ 的乘法不适合结合律, 因此得不到等价关系, 所以不存在投影空间. 不过有以下 Hopf 映射

$$\pi: S^{15} \to S^8$$

存在. 这时 $S^{15} \subset \mathbb{R}^{16} = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$. 而 $S^8 = \mathbb{R}^8 \smile \{\infty\} = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$. $\pi(c_1, c_2) = \frac{c_1}{c_2}$[1], $c_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2$.

26.31　定义　给定 $(X, x_0), (Y, y_0)$, 这里 $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ 为参考点. 那么它们的 **楔和**

$$X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y,$$

---

1) 当 $c_2 = 0$ 时, $\frac{c_1}{c_2}$ 视为 ∞.

它们的 **尖积**

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y.$$

26.32 例 以 I^m 表示 $\mathbb{R}^m$ 中的标准方体 $\{(x_1, \cdots, x_m) | 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \cdots, m\}$. 那么 $I^m \times I^n = I^{m+n}$, 而且

$$\partial(I^{m+n})^{1)} = (\partial I^m \times I^n) \cup (I^m \times \partial I^n).$$

以 $z_m \in S^m$ 和 $z_n \in S^n$ 表示参考点. 那么存在相对同胚

$$\alpha : (I^m, \partial I^m) \to (S^m, z_m),$$

$$\beta : (I^n, \partial I^n) \to (S^n, z_n),$$

它们决定

$$\alpha \times \beta : I^m \times I^n \to S^m \times S^n.$$

注意

$$I^{m+n} \backslash \partial I^{m+n} = (I^m \backslash \partial I^m) \times (I^n \backslash \partial I^n).$$

因此

$$\alpha \times \beta | I^{m+n} \backslash \partial I^{m+n} :$$

$$(I^m \backslash \partial I^m) \times (I^n \backslash \partial I^n) \to (S^m \backslash z_m) \times (S^n \backslash z_n)$$

$$= S^m \times S^n \backslash (S^m \times \{z_n\} \cup \{z_m\} \times S^n)$$

$$= S^m \times S^n \backslash S^m \vee S^n.$$

注意上述映射是一一和满的, 故由 (26.25), $S^m \times S^n$ 是由 $S^m \vee S^n$ 通过映射 [2]

---

1) ∂I^{m+n} 表示 I^{m+n} 的边界 $= \{(x_1, \cdots, x_{m+n}) |$ 存在 i 使 $x_i = 0$ 或 $1\}$.

2) 这里我们不区分 I^{m+n} 和 E^{m+n} 及 ∂I^{m+n} 和 S^{m+n-1}.

$$\alpha\times\beta|\partial I^{m+n}=r:S^{m+n-1}\to S^m\vee S^n$$

添上一个 $(m+n)$ 胞腔而得： $S^m\times S^n=E^{m+n}\smile_r(S^m\vee S^n)$.

以上是一些常见的、通过添胞腔而得到的空间的例.

下面我们讨论有带偶 (X,A) 和 $(X\smile_f Y,Y)$ 的同调群之间有何关系. 这时我们只假定 H 为同调论, 而不管 H 究竟是哪一个具体的同调论.

为了以后的需要，我们证明

26.33　定理　设 (X,B,A) 为三重, 同调论在偶 $(X,B),(X,A)$ 和 (B,A) 上均有定义. 于是

$$\begin{aligned}\cdots\to H_k(B,A)&\xrightarrow{i_k}H_k(X,A)\xrightarrow{j_k}H_k(X,B)\\&\xrightarrow{\triangle_k}H_{k-1}(B,A)\to\cdots\end{aligned}$$

为正合序列, 其中 i_k,j_k 均由置入映射导出, 而 $\triangle_k=\tau_{k-1}\circ\partial_k$, 这里 $\partial_k:H_k(X,B)\to H_{k-1}(B)$ 为同调论 H 中的边缘同态, 而 $\tau_{k-1}:H_{k-1}(B)\to H_{k-1}(B,A)$ 由置入映射导出.

证明　首先我们有：不论 X 如何，总有

$$H_k(X,X)=0,\quad\forall k.$$

这由 (X,X) 的正合序列立知.

考虑下面的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{k+1}(B,A) & & \xrightarrow{1} & & H_k(A) & & \xrightarrow{2} & & H_k(X)\\
 & \searrow 4 & & \nearrow 2 & & \searrow 1 & & \nearrow 3 & \\
 & & H_{k+1}(X,A) & & & & H_k(B) & & \\
 & \nearrow 2 & & \searrow 4 & & \nearrow 3 & & \searrow 1 & \\
H_{k+1}(X) & & \xrightarrow[3]{} & & H_{k+1}(X,B) & & \xrightarrow[4]{} & & H_k(B,A)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & \overset{3}{\rightarrow} & H_k(X,B) & \overset{4}{\rightarrow} & \\
\searrow 2 & \nearrow 4 & & \searrow 3 & \\
H_k(X,A) & & & H_{k-1}(B) & \\
\nearrow 4 & \searrow 2 & & \nearrow 1 & \\
 & \underset{1}{\rightarrow} & H_{k-1}(A) & \underset{2}{\rightarrow} &
\end{array}$$

其中沿 "1" 前进为 (B,A) 的正合序列，沿 "2" 为 (X,A) 的正合序列，沿 "3" 为 (X,B) 的正合序列．要证明的是沿 "4" 的序列为正合．

我们只证在 $H_k(X,A)$ 的正合性 (参见下图)，即证明：

$$\mathrm{Im} i_k = \mathrm{Ker} j_k.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & H_k(X) & & \overset{j^B}{\longrightarrow} & & H_k(X,B) & \\
i^B \nearrow & & \searrow j^A & & j_k \nearrow & & \searrow \partial_k \\
H_k(B) & & & H_k(X,A) & & & H_{k-1}(B) \\
\searrow j & & i_k \nearrow & & \partial^A \searrow & & \nearrow i^A \\
 & H_k(B,A) & & \overset{\partial^B}{\longrightarrow} & & H_{k-1}(A) &
\end{array}$$

先来证明 $j_k i_k = 0$：考虑下图

$$\begin{array}{ccc}
H_k(B,A) & \overset{i_k}{\longrightarrow} & H_k(X,A) \\
m_k \downarrow & & \downarrow j_k \\
H_k(B,B) & \overset{n_k}{\longrightarrow} & H_k(X,B),
\end{array}$$

其中 i_k, j_k, m_k, n_k 均由置入映射导出，于是上图可换，即 $j_k i_k = n_k m_k$. 但由于 $H_k(B,B) = 0$. 因此 m_k 为零同态，于是 $n_k m_k = 0$, 故 $j_k i_k = 0$.

再来证明 $\mathrm{Ker} j_k \subset \mathrm{Im} i_k$.

设 $x \in H_k(X,A)$ 使 $j_k x = 0$. 于是 $\partial_k j_k x = 0$, 而 $\partial_k j_k = i^A \partial^A$, 因此 $i^A \partial^A x = 0$, 即 $\partial^A x \in \mathrm{Ker} i^A = \mathrm{Im} \partial^B$. 故有 $y \in H_k(B,A)$ 使 $\partial^B y = \partial^A x$. 但 $\partial^B = \partial^A i_k$. 因此由 $\partial^B y - \partial^A x =$

$\partial^A i_k y - \partial^A x = \partial^A(i_k y - x) = 0$, 知 $(i_k y - x) \in \mathrm{Ker}\partial^A = \mathrm{Im} j^A$. 故有 $z \in H_k(X)$ 使 $j^A z = i_k y - x$. 考虑 $j^B z$. 由 $j^B = j_k j^A$, 知 $j^B z = j_k j^A z = j_k(i_k y - x)$. 已经证明 $j_k i_k = 0$. 因此 $j^B z = -j_k x$. 而按假定 $j_k x = 0$. 因此 $j^B z = 0$. 即 $z \in \mathrm{Ker} j^B = \mathrm{Im} i^B$. 这样有 $w \in H_k(B)$ 使 $i^B w = z$. 命 $u = y - j_k(w)$, 它是 $H_k(B, A)$ 中的元. 下面证明 $i_k u = x$. 于是 $\mathrm{Ker} j_k \subset \mathrm{Im} i_k$ 成立.

为了证明 $i_k u = x$, 这由

$$\begin{aligned} i_k u &= i_k(y - j_k w) = i_k y - i_k j_k w \\ &= i_k y - j^A i^B w = i_k y - j^A z = i_k y - (i_k y - x) = x \end{aligned}$$

即知.

在别处的正合性请读者补证. ◁

26.34 定理 设 (X, A) 为有带偶, Y 为 Hausdorff 空间, $f: A \to Y, Z = X \smile_f Y$, 那么相对同胚 $\overline{f}: (X, A) \to (Z, Y)$ 导出的

$$\overline{f}_*: H_k(X, A) \to H_k(Z, Y)$$

为同构.

证明 设 B 是 A 在 X 中的一个带. 考虑可换图

$$\begin{array}{ccc} H_k(X, A) & \xrightarrow{i} & H_k(X, B) \\ \downarrow \overline{f}_* & & \downarrow f_2 \\ H_k(Z, Y) & \xrightarrow{j} & H_k(Z, Y \smile \overline{f}(B)). \end{array}$$

其中水平箭头由置入映射导出, 垂直箭头由 $\overline{f}: X \to Z$ 导出.

我们来证明 f_2, i 和 j 都为同构.

考虑如下的可换图

$$\begin{array}{ccc} H_k(X - A, B - A) & \xrightarrow{\cong} & H_k(X, B) \\ \cong\downarrow f_3 & & \downarrow f_2 \\ H_k(Z - Y, \overline{f}(B - A)) & \xrightarrow{\cong} & H_k(Z, Y \smile \overline{f}(B)). \end{array}$$

这时水平箭头为切除同构，f_3 由同胚导出，故也是同构. 因此 f_2 是同构.

再证 i 为同构. 注意 A 为 B 的形变收缩，故它们有相同的同调群，于是 $H_k(B,A)=0$, 故由 (X,B,A) 的正合序列 (26.23)

$$\cdots \to H_k(B,A) \to H_k(X,A) \xrightarrow{i_k} H_k(X,B) \\ \to H_{k-1}(B,A) \to \cdots,$$

知 i_k 为同构.

同样可证 j 为同构. 这样定理得证. ◁

26.35 推论 在 (26.34) 的假定下，我们有正合列

$$\cdots \to H_k(A) \to H_k(X) \oplus H_k(Y) \to H_k(X \smile_f Y) \\ \to H_{k-1}(A) \to \cdots,$$

证明 考虑如下的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots\to & H_k(A) & \to & H_k(X) & \to & H_k(X,A) & \to & H_{k-1}(A) & \to\cdots \\ & \downarrow(\overline{f}|A)_* & & \downarrow\overline{f}_* & & \cong\downarrow\overline{f}_* & & \downarrow(\overline{f}|A)_* & \\ \cdots\to & H_k(Y) & \to & H_k(Z) & \to & H_k(Z,Y) & \to & H_{k-1}(Y) & \to\cdots \end{array}$$

由于 $\overline{f}_*: H_k(X,A) \to H_k(Z,Y)$ 为同构，故由 (11.2), 得所要的正合列. ◁

26.36 推论 在 (26.34) 的假定下，若 $(X,A)=(E^n,S^{n-1})$, 那么 $\overline{f}_*: H_k(E^n, S^{n-1}) \to H_k(E^n \smile_f Y, Y)$ 为同构，而且有正合列

$$\cdots \to H_k(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} H_k(Y) \to H_k(E^n \smile_f Y) \\ \to H_{k-1}(S^{n-1}) \to \cdots.$$

证明 这是 (26.35) 中，$(X,A)=(E^n,S^{n-1})$ 的情形. ◁

26.37 推论 对于贴附空间 $Z=E^n \smile_f Y$, 我们有

$$\tilde{H}_k(E^n \smile_f Y) = \tilde{H}_k(Y), \quad k \neq n, n-1,$$
$$\tilde{H}_{n-1}(E^n \smile_f Y) = \tilde{H}_{n-1}(Y)/\mathrm{Im} f_{n-1_*},$$

$\tilde{H}_n(E^n \smile_f Y)$ 可纳入正合列

$$0 \to \tilde{H}_n(Y) \to H_n(E^n \smile_f Y) \to \mathrm{Ker} f_{n-1*} \to 0.$$

但 $\mathrm{Ker} f_{n-1*} \subset H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$, 因此上述短列分裂, 故

$$\begin{aligned}\tilde{H}_n(E^n \smile_f Y) &= \tilde{H}_n(Y) + \mathrm{Ker} f_{n-1*} \\ &= \begin{cases} \tilde{H}_n(Y), & \mathrm{Ker}\ f_{n-1*} = 0, \\ \tilde{H}_n(Y) \oplus \mathbb{Z}, & \mathrm{Ker}\ f_{n-1*} \neq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

证明 由 (26.36) 和 $H_k(S^{n-1}) = 0 (k \neq n-1)$ 立知. ◁

¡ 这个推论告诉我们, 贴附空间 $E^n \smile_f Y$ 的同调群, 也即往 Y 上添一个 n 胞腔.

(i) 它不影响 n 和 $n-1$ 以外的同调群;

(ii) 对于第 $(n-1)$ 个同调群而言, 新添的 n 胞腔, 可能填满 Y 的一个 "洞";

(iii) 对于第 n 个同调群而言, 新添的 n 胞腔可能产生一个新的 "洞".

26.38 推论 对于 $S^m \times S^n$, 我们有

$$H_k(S^m \times S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, m, n, m+n, \\ 0, & k \neq 0, m, n, m+n. \end{cases}$$

证明 这由 $S^m \times S^n = E^{m+n} \smile (S^m \vee S^n)$ 立知. ◁

26.39 推论 对于复投影空间 $\mathbb{C}P^n$, 我们有

$$H_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, 2, \cdots, 2n, \\ 0, & k \neq 0, 2, \cdots, 2n. \end{cases}$$

证明 当 $n = 0$ 时, $\mathbb{C}P^0 = P$ 结论成立.

当 $n = 1$ 时, $\mathbb{C}P^1 = S^2$, 结论也成立.

往下用归纳法, 设结论对 $k < n$ 成立.

由 (26.28),

$$\mathbb{C}P^n = E^{2n} \smile_\pi \mathbb{C}P^{n-1}.$$

故由 (26.36) 的正合列

$$\cdots \to H_k(S^{2n-1}) \xrightarrow{\pi_*} H_k(\mathbb{C}P^{n-1}) \to H_k(\mathbb{C}P^n)$$
$$\to H_{k-1}(S^{2n-1}) \to \cdots$$

得

$$H_{2n}(S^{2n-1}) \to H_{2n}(\mathbb{C}P^{n-1}) \to H_{2n}(\mathbb{C}P^n) \to$$
$$\to H_{2n-1}(S^{2n-1}) \to H_{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) \to H_{2n-1}(\mathbb{C}P^n) \to 0.$$

注意 $H_{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) = 0, H_{2n}(\mathbb{C}P^{n-1}) = 0$, 所以

$$H_{2n-1}(\mathbb{C}P^n) = 0,$$
$$H_{2n}(\mathbb{C}P^n) \cong H_{2n-1}(S^{2n-1}) = \mathbb{Z}.$$

◁

26.40 推论 对于四元数投影空间 $\mathbb{B}P^n$, 有

$$H_k(\mathbb{B}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, 4, \cdots, 4n, \\ 0, & k \neq 0, 4, \cdots, 4n. \end{cases}$$

证明 和 (26.39) 类似. ◁

关于实投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 的同调群, 其计算较为麻烦, 见 (27.3).

26.41 命题 如果 (X, A) 为有带偶, 那么 X/A(将 A 叠合为一点 P 的空间) 为 Hausdorff 空间, 且 P 有一个开邻域, 它以 P 为强形变收缩. 此外有同构

$$\tilde{H}_k(X/A) \cong H_k(X, A), \quad k \in \mathbb{Z},$$

及正合列

$$\cdots \to \tilde{H}_k(A) \to \tilde{H}_k(X) \to \tilde{H}_k(X/A) \to \tilde{H}_{k-1}(A) \to \cdots.$$

证明 命 $f : A \to P$, 那么 $Z = X \smile_f P = X/A$. 故由 (26.24), 知 $Z = X/A$ 为 Hausdorff 空间, 且 P 为某个开集的强形变收缩. 又由 (26.34),

$$\overline{f}_* : H_k(X, A) \to H_k(Z, P) = \tilde{H}_k(X/A)$$

为同构. 这样, 所需的正合列, 可以由 (X, A) 的正合列而得. ◁

26.42 推论 若 $(X, x_0), (Y, y_0)$ 都是有带偶, 其中 x_0, y_0 分别为 X, Y 的点, 则 $(X \amalg Y, x_0 \smile y_0)$ 也是有带偶, 而且

$$X \vee Y = X \amalg Y / x_0 \smile y_0,$$

于是

$$H_k(X \vee Y) = \begin{cases} \tilde{H}_k(X) \oplus \tilde{H}_k(Y), & k > 0, \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{a+b-1}, & k = 0. \end{cases}$$

其中 a, b 分别为 X, Y 的连通分量数.

证明 按定义, 立知 $(X \amalg Y, x_0 \smile y_0)$ 为有带偶, $X \vee Y = X \amalg Y / x_0 \smile y_0$. 至于 $X \vee Y$ 的同调群, 由 (26.41),

$$\begin{aligned} &\tilde{H}_k(X \vee Y) \\ &= \tilde{H}_k(X \amalg Y / x_0 \smile y_0) = H_k(X \amalg Y, x_0 \smile y_0) \\ &= H_k(X, x_0) \oplus H_k(Y, y_0) = \tilde{H}_k(X) \oplus \tilde{H}_k(Y), k \neq 0. \end{aligned}$$

$H_0(X \times Y) = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ 显然成立. ◁

26.43 定义 对空间 X, 称空间

$$SX = X \times I / (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$$

为 X 的同纬[1]. 命 C_+X 为 SX 中的子空间 $X \times [\frac{1}{2}, 1] / X \times \{1\}$, C_-X 为 $X \times [0, \frac{1}{2}] / X \times \{0\}$. 显然 $C_+X(C_-X)$ 以点 $X \times \{1\}(X \times \{0\})$ 为自己的强形变收缩, 而且 $X = C_+X \cap C_-X$.

26.44 推论 对 Hausdorff 空间 X, 我们有

$$H_k(SX) = \begin{cases} H_{k-1}(X), & k > 0, \\ \mathbb{Z}, & k = 0. \end{cases}$$

---

1) 试与 (12.7) 比较.

证明 这由以下的一串式子而知:

$$\begin{aligned} H_k(SX) &= \tilde{H}_k(SX) = H_k(SX,P) \cong H_k(SX,C_+X) \\ &\cong H_k(CX,X) \cong H_{k-1}(X), \quad k>0. \end{aligned}$$

其中第二个同构为切除同构，其它两个分别由 C_+X 和 C_-X 都以一点为强形变收缩得到. ◁

§27. CW 空间及其同调论

有了以上的准备，特别是有了添胞腔这一概念，我们就可以正式引进 CW 空间了.

27.1 定义 紧 T_2 空间 X 叫做是一个有限的 n 维 CW 空间，如果 X 有一个 CW 分解，即存在一串闭子空间列

$$X = X^n \supseteq X^{n-1} \supseteq \cdots \supseteq X^1 \supseteq X^0 \supseteq X^{-1} = \emptyset,$$

使

(i) X^0 是一个有限点集;

(ii) X^k 是往 X^{k-1} 上添加有限个 k 胞腔 (参见 26.22) 而得, $n \geq k > 0$.

由 (ii) 知 $X^k \backslash X^{k-1}$ 是有限个开胞腔的拓扑和，这些开胞腔设为 $e_1^k, \cdots, e_{\alpha_k}^k$，则称它们为 X 的 k 胞腔. 如果约定 E^0 的边 $\partial E^0 = S^{-1} = \emptyset$. 那么上述的 (i) 与 (ii) 可合并为: 对每个 $k, n \geq k \geq 0$, 存在相对同胚

$$f_k : (E_1^k \amalg \cdots \amalg E_{\alpha_k}^k, S_1^{k-1} \amalg \cdots \amalg S_{\alpha_k}^{k-1}) \to (X^k, X^{k-1}).$$

以后称 X^k 为 X 的 k 骨架.

27.2 定理 如果 X 为 n 维 CW 空间，则:

1) X 是不相交的子集 $\{e_i^k | i = 1, \cdots, \alpha_k, k = 0, 1, \cdots, n.\}$ 的并，这里 e_i^k 和 $\overset{\circ}{E}{}^k$ 同胚;

2) $X^k = \bigcup_{j \le k} \bigcup_{i=1}^{\alpha_j} e_i^j$;

3) 对每个 k, 集 $\overline{e}_i^k - e_i^k \subset X^{k-1}, i = 1, \cdots, \alpha_k$;

4) 对如上的 k 和 i, 有相对同胚

$$h : (E^k, S^{k-1}) \to (\overline{e}_i^k, \overline{e}_i^k - e_i^k);$$

(映射 h 为 k 胞腔 e_i^k 的特征映射， $h|S^{k-1}$ 为贴附映射).

反之，适合 1)-4) 的空间 X 为 n 维 CW 空间，而 $\{X^k\}$ 为其 CW 分解.

证明 请读者自行补出. ◁

例 上一节提到的 $S^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n$ 和 $S^m \times S^n$ 都是 CW 空间的例.

¡ 我们已经提到，CW 空间包括有常见的许多空间. 例如，流形 M 可以通过它上面定义的、无退化临界点的实可微函数 f 来“得到”一个 CW 分解 (Morse 理论).

¡ 同一个紧 T_2 空间 X, 可以有不同的 CW 分解. 特别，可剖分空间的不同剖分提供不同的 CW 分解. 但不同维的胞腔数之间存在着一定的关系 (参见 (27.6)).

27.3 定理 若 X 为 n 维 CW 空间，那么 $H_k(X)=H_k(X^{k+1})$ 是有限生成的可换群，并且 $H_n(X)$ 自由， $H_k(X) = 0, k > n$.

证明 对 X 的维数行归纳法.

当 X 的维数为 0 时，结论显然成立.

设 X 的维数 $< n$ 时，结论成立. 考虑 n 维的情形.

这时 $X = X^n$ 是往 X^{n-1} 上添 α_n 个 n 胞腔 $e_1^n, \cdots, e_{\alpha_n}^n$ 而得. 注意，这些 n 胞腔可以一个一个往上添. 而每添一个，按 (26.37), 只影响 n 维和 $(n-1)$ 维同调群. 而且这种影响，在 n 维顶多只是增添一个新的母元. 故添有限个 n 胞腔，顶多只是将 n

维同调群由 0 变为一个有限生成的自由可换群. 对 $(n-1)$ 维, 它的影响顶多是添一个关系, 因此不影响它的有限生成性. 至于其它的维数, 同调群不变, 特别 $H_k(X)=0, k>n$ 归纳法完成. ◁

27.4 定义 若 G 为有限生成的, 则

$$G=\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{n}\oplus\mathbb{Z}/r_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/r_m,\quad r_i|r_{i+1}, i=1,\cdots,m-1.$$

这时称 n 为群 G 的秩, 记为 $\beta(B)$.

秩有以下性质, (请读者自行补出) 若 H 为 G 的子群, 那么

$$\beta(G)=\beta(H)+\beta(G/H). \tag{1}$$

有限 CW 空间 X 的第 k 个 Betti 数 $\beta_k(X)$ 为 $H_k(X)$ 的秩 (由 (27.3), 知此定义合理), X 的 Euler 数

$$\chi(X)=\sum_k(-1)^k\beta_k(X).$$

27.5 命题 若 $Z=E^n\smile_f Y$, 则当 $\chi(Y)$ 有意义时,

$$\chi(Z)=\chi(Y)+(-1)^n.$$

证明 由 (26.37), 我们有

$$\tilde{H}_k(Z)=\tilde{H}_k(Y),\quad k\neq n,n-1,$$

$$0\to\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})/\mathrm{Ker}f_{n-1_*}\xrightarrow{f_{n-1*}}\tilde{H}_{n-1}(Y)\to\tilde{H}_{n-1}(Z)\to 0, \tag{2}$$

$$0\to\tilde{H}_n(Y)\to\tilde{H}_n(Z)\to\mathrm{Ker}f_{n-1_*}\to 0. \tag{3}$$

因此

$$\beta_k(Z)=\beta_k(Y),\quad k\neq n,n-1.$$

当 $\mathrm{Ker} f_{n-1_*} = 0$ 时，由 (1), (2) 和 (3), 得

$$\beta_{n-1}(Y) = \beta_{n-1}(Z) + 1,$$

$$\beta_n(Y) = \beta_n(Z).$$

所以这时结论成立.

若 $\mathrm{Ker} f_{n-1_*} \neq 0$, 那么因为它是 $\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ 的子群，所以 $\beta(\mathrm{Ker} f_{n-1_*}) = 1, \beta(\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})/\mathrm{Ker} f_{n-1_*}) = 0$. 于是由 (1), (2) 和 (3), 得

$$\beta_{n-1}(Y) = \beta_{n-1}(Z),$$

$$\beta_n(Z) = \beta_n(Y) + 1.$$

这样结论仍真. ◁

27.6 推论 (Euler-Poincaré) 若 X 为有限 CW 空间，它的 k 胞腔个数记为 α_k, 那么

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k \alpha_k.$$

证明 对 X 的维数 n 行归纳法.

对 0 维 CW 空间，结论显然成立.

设结论对维数 $< n$ 的 CW 空间成立. 考虑 n 维的情形. 这时

$$\begin{aligned} X &= X^n \\ &= E^n_{\alpha_n} \smile_{f_{\alpha_n}} (E^n_{\alpha_n - 1} \smile_{f_{\alpha_n - 1}} (\cdots (E^n_1 \smile_{f_1} X^{n-1}) \cdots)), \end{aligned}$$

因此由 (27.5) 及归纳假设，得

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \chi(X^{n-1}) + \underbrace{(-1)^n + \cdots + (-1)^n}_{\alpha_n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \alpha_k + (-1)^n \alpha_n. \end{aligned}$$

归纳法完成. ◁

结合 (27.5) 和 (27.6), 我们有：对于 CW 空间 X 而言，

$$\sum_k (-1)^k \beta_k(X) = \sum_k (-1)^k \alpha_k.$$

注意 $\beta_k(X)$ 为 $H_k(X)$ 的秩，因此是同伦不变量，可是右端的 α_k 为 X 的 k 胞腔数，它可以因 X 的不同 CW 分解而异. 可 Euler-Poincaré 定理却保证它们的交错和相等！

§28. 同调论的唯一性

28.1 定义 空间偶 (X, A) 叫做相对 CW 空间偶, 如果 X 是紧 T_2 空间，它有一个 CW 分解，即存在一串闭子空间列

$$X = X^n \supseteq X^{n-1} \supseteq \cdots \supseteq X^1 \supseteq X^0 \supseteq X^{-1} = A,$$

使

1) $X^0 - X^{-1}$ 至多为一有限点集;

2) X^k 是往 X^{k-1} 上添有限多个 k 胞腔而得， $n \geq k > 0$.

28.2 定理 对相对 CW 空间偶 (X, A) 及其间的映射所决定的同调论 H 和 $\mathcal{H}$, 如果还存在对应 $F : H \to \mathcal{H}$, 即：对 (X, A), 有同态 $F_n(X, A) : H_n(X, A) \to \mathcal{H}_n(X, A)$, 使图

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(X,A) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(Y,B) & & H_n(X,A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) \\ \downarrow F_n(X,A) & & \downarrow F_n(Y,B) & & \downarrow F_n(X,A) & & \downarrow F_{n-1}(A) \\ \mathcal{H}_n(X,A) & \xrightarrow{\mathcal{H}_n(f)} & \mathcal{H}_n(Y,B), & & \mathcal{H}_n(X,A) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{H}_{n-1}(A) \end{array}$$

可换，这里 $f : (X, A) \to (Y, B)$. 那么当

$$F_0(P) : H_0(P) \to \mathcal{H}_0(P)$$

为同构时， $F_n(X, A)$ 恒为同构.

证明 我们先来证明， $(X, A) = (S^n, \phi)$ 时，结论成立.

当 $n=0$ 时， $S^0 = P \smile Q$. 考虑可换图

$$\begin{array}{ccc} H_k(P) & \xrightarrow{H_k(i)} & H_k(P \smile Q, Q) \\ \downarrow F_k(P) & & \downarrow F_k(P \smile Q, Q) \\ \mathcal{H}_k(P) & \xrightarrow{\mathcal{H}_k(i)} & \mathcal{H}_k(P \smile Q, Q) \end{array}$$

注意， $H_k(i)$ 和 $\mathcal{H}_k(i)$ 按切除定理，它们都是同构. 又 $F_k(P)$ 按假定为同构. 故 $F_k(P \smile Q, Q)$ 是同构.

在可换图

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{k+1}(S^0,P) & \to & H_k(P) & \to & H_k(S^0) & \to & H_k(S^0,P) & \to & H_{k-1}(P) \\ \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \downarrow F_k(S^0) & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \mathcal{H}_{k+1}(S^0,P) & \to & \mathcal{H}_k(P) & \to & \mathcal{H}_k(S^0) & \to & \mathcal{H}_k(S^0,P) & \to & \mathcal{H}_{k-1}(P) \end{array}$$

中，第一个垂直箭头刚证明为同构，第二个已知为同构；同样后两个也是同构. 故由 5 引理

$$F_k(S^0) : H_k(S^0) \to \mathcal{H}_k(S^0)$$

为同构.

以下设 $n < q$ 时， $F_k(S^n)$ 为同构. 考虑 $n = q$ 的情形.

首先注意， $F_k(E^q)$ 为同构. 又 $S^q = E^q \smile_f P$, 故在可换图

$$\begin{array}{ccc} H_k(E^q, S^{q-1}) & \xrightarrow{\cong} & H_k(S^q, P) \\ \cong\downarrow & & \downarrow F_k(S^q, P) \\ \mathcal{H}_k(E^q, S^{q-1}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}_k(S^q, P) \end{array}$$

中，由 (E^q, S^{q-1}) 的正合同调列，知左边箭头为同构，两个水平箭头由 (26.34), 知为同构. 于是 $F_k(S^q, P)$ 为同构. 再由 (S^q, P) 的正合同调列及 5 引理，知 $F_k(S^q)$ 为同构. 这样就证明了

$$F_k(S^q) : H_k(S^q) \to \mathcal{H}_k(S^q)$$

为同构.

现在对一般的 (X, A), 证明结论成立.

我们对 (X, A) 中添加的胞腔数行归纳法.

只添一个胞腔 e^n 时，问题就是证明

$$F_k : H_k(X,A) = \tilde{H}_k(X/A) \to \tilde{\mathcal{H}}_k(X/A) = \mathcal{H}_k(X,A)$$

是同构. 但这是已经证明的 $X/A = S^n$ 的情形.

以下设添 $(m-1)$ 个胞腔时，结论真. 考虑添 m 个的情形.

任取 X 的一个最高维胞腔 e_i^n 来. 剩下的记为 X'. 那么 (X',A) 的胞腔数为 $(m-1)$, 而 (X,X') 只添一个胞腔.

考虑 (X,X',A) 的正合同调列 (26.33). 在交换图

$$\begin{array}{ccccc}
H_{k+1}(X,X') & \to & H_k(X',A) & \to & H_k(X,A) \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow F_k(X,A) \\
\mathcal{H}_{k+1}(X,X') & \to & \mathcal{H}_k(X',A) & \to & \mathcal{H}_k(X,A)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\to & H_k(X,X') & \to & H_{k-1}(X',A) \\
 & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
\to & \mathcal{H}_k(X,X') & \to & \mathcal{H}_{k-1}(X',A)
\end{array}$$

中, 第一 (四) 个箭头, 因为是只添一个胞腔, 故为同构, 第二 (五) 个箭头, 按归纳假定是同构. 因此由 5 引理， $F_k(X,A)$ 为同构. 定理得证.

i 1) 由此知，限于 CW 空间偶，所有的同调论都一样. 特别, 在多面体上, 单纯同调论和连续同调论一致. 于是相应的 Betti 数， Euler 数也一致.

2) 如果在同调论的公理化中，略去维数公理的话，唯一性不再成立. 但却有许多有意义的理论适合余下的各条公理. 通常将这些理论称为广义同调论. 稳定同伦论, 不同的 K 理论和配边理论等均是广义同调论.

关于上同调论的唯一性，不难从取对偶的办法得证.

§29. CW 空间的胞腔链复形

上面已经证明，对于 CW 空间 (偶) 来说，各种同调论都是一样的. 但如何真正把它们算出来呢？利用连续同调论，一般不

是不好算就是太麻烦. 下面我们介绍 CW 空间 (偶) 的胞腔链复形. 利用它们, 同调群的计算将不再困难.

29.1 定理 若 X 为有限 CW 空间, $\{X^n\}$ 为它的 CW 分解, 那么

$$H_k(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\alpha_k}, & k = n. \end{cases}$$

其中 α_n 为 X 的 n 胞腔的个数. 命

$$D_m(X) = H_m(X^m, X^{m-1}), \quad m \geq 0$$

$$\partial_m = j_{m-1} \circ \partial'_m : H_m(X^m, X^{m-1})$$
$$\to H_{m-1}(X^{m-1}) \to H_{m-1}(X^{m-1}, X^{m-2}),$$

其中 ∂'_m 为 (X^m, X^{m-1}) 的正合同调列中的连接同态. 则 $D_*(X) = \{D_m(X), \partial_m\}$ 为链复形, 叫做 X 的 **胞腔链复形**.

证明 由于 X^m 是往 X^{m-1} 上添 m 胞腔:

$$X^m = E^m_{\alpha_m} \smile_{f_{\alpha_m}} (\cdots \smile (E^m_1 \smile_{f_1} X^{m-1}) \cdots),$$

因此由 (26.41), 对 $m > 0$,

$$H_k(X^m, X^{m-1}) \cong \tilde{H}_k(X^m / X^{m-1}) = \tilde{H}_k(S^m_1 \vee \cdots \vee S^m_{\alpha_m}).$$

再由 (26.42),

$$\tilde{H}_k(S^m_1 \vee \cdots \vee S^m_{\alpha_m}) = \tilde{H}_k(S^m_1) \oplus \cdots \oplus \tilde{H}_k(S^m_{\alpha_m}).$$

因此

$$H_k(X^m, X^{m-1}) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\alpha_m} & k = m, \end{cases}$$

其中每个 $\mathbb{Z}$ 的母元，由相应的 m 胞腔 e_i^m 产生.

$\partial\partial=0$ 显然. ◁

29.2 定理 若 X 为 CW 空间，那么

$$H_n(X)=H_n(D_*(X))=\frac{\mathrm{Ker}\partial n}{\mathrm{Im}\partial_{n+1}},$$

也就是说，X 的同调群可以用 $D_*(X)=\{D_n(X),\partial_n\}$ 来予以计算.

证明 由 (27.3), 我们有

$$H_n(X^{n-1})=0,$$

$$H_n(X^{n+1})=H_n(X).$$

考虑下图

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & \rightarrow & H_n(X^{n-1}) & = & 0 \\
 & & & \downarrow & & \\
H_{n+1}(X^{n+1},X^n) & & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & H_n(X^n) & \xrightarrow{j_n} & \\
 & & & \downarrow k_n & & \\
 & & & H_n(X^{n+1}) & \rightarrow &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \rightarrow & H_{n-1}(X^{n-2}) & = & 0 \\
 & & \downarrow & & \\
H_n(X^n,X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial'_n} & H_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{j_{n-1}} & H_{n-1}(X^{n-1},X^{n-2}) \\
 & & \downarrow & & \\
 & & H_{n-1}(X^n) & \rightarrow & 0
\end{array}$$

命

$$\phi:H_n(X)(=H_n(X^{n+1}))\rightarrow\frac{\mathrm{Ker}\partial_n}{\mathrm{Im}\partial_{n+1}}=H_n(D_*(X))$$

$$z\mapsto[j_nk_n^{-1}(z)].$$

显然 $j_nk_n^{-1}(z)\in\mathrm{Ker}\partial_n$, 因此上式右端有意义. 又注意，$k_n^{-1}(z)$ 虽不唯一 (可以差 $\mathrm{Im}\partial'_{n+1}$ 中的一个元), 但再经 j_n 作用后，差 $\mathrm{Im}(j_n\partial'_{n+1})=\mathrm{Im}\partial_{n+1}$ 中的一个元，因此在商群 $\dfrac{\mathrm{Ker}\partial_n}{\mathrm{Im}\partial_{n+1}}$ 中唯一. 故 ϕ 的定义是合理的.

现在我们来证明 ϕ 为同构.

先证 ϕ 为单.

设 $\phi(z) = 0$, 即 $j_n(d) \in \mathrm{Im}\partial_{n+1}$, 这里 $d \in H_n(X^n)$ 使 $k_n(d) = z$. 设 $c \in H_{n+1}(X^{n+1}, X^n)$ 使 $\partial_{n+1}(c) = j_n\partial'_{n+1}(c) = j_n(d)$. 于是 $j_n(\partial'_{n+1}(c) - d) = 0$. 注意 $H_n(X^{n-1}) = 0$, 因此 j_n 为单, 故 $\partial'_{n+1}(c) = d$. 从而 $z = k_n(d) = k_n\partial'_{n+1}(c) = 0$, 故 ϕ 为单.

再证 ϕ 为满.

任取 $[u] \in H_n(D_*(X))$, 那么 $u \in \mathrm{Ker}\partial_n$. 注意 $H_{n-1}(X^{n-2}) = 0$, 故 j_{n-1} 为单. 于是 $\mathrm{Ker}\partial_n = \mathrm{Ker}(j_{n-1}\partial'_n) = \mathrm{Ker}\partial'_n = \mathrm{Im}j_n$. 设 $d \in H_n(X^n)$ 使 $j_n(d) = u$. 那么 $k_n(d) \in H_n(X^{n+1})$, 而且 $\phi(k_n(d)) = [j_n(d)] = [u]$. 故 ϕ 为满. $\lhd$

有了上述定理, 在计算 CW 空间的同调群时, 我们就可以利用胞腔链复形.

现在我们来看一下, 对于可剖分空间而言, 它的胞腔链复形是怎样的一个情况.

设 $X = |K|$ 是多面体, K^q 是 K 的 q 维骨架. 于是 $X^q = |K^q|$ 的全体构成 X 的一个 CW 分解. 这时

$$H_k(X^m, X^{m-1}) = H_k(K^m, K^{m-1}).$$

注意上面的同调群, 由于限制在 CW 空间上是唯一的, 因此它可以指单纯同调群, 也可以指连续同调群, 或者别的什么同调群, 只要它满足同调论的要求.

如果取单纯同调群, 那么

$$H_k(K^k, K^{k-1}).$$

就是 K 的 k 维链群 $C_k(K)$. 实际上, 由于 (K^k, K^{k-1}) 没有维数 $> k$ 的单形, 因此 $H_k(K^k, K^{k-1}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\partial}_k : C_k(K^k)/C_k(K^{k-1}) \to C_{k-1}(K^k)/C_{k-1}(K^{k-1})) = \mathrm{Ker}(\tilde{\partial}_k : C_k(K^k) \to C_{k-1}(K^k)$

$/C_{k-1}(K^{k-1})) = C_k(K)$. 从类似的讨论可以知道，胞腔链复形 $D_*(X) = \{D_kX), \partial_k\}$ 中的边缘算子 ∂_k 这时就是复形 K 的链复形 $C_*(K) = \{C_k(K), \partial_k\}$ 中的边缘算子. 也就是说，胞腔链复形可以看做是单纯链复形的一种推广.

下面我们用胞腔链复形来计算实投影空间的同调群.

29.3 定理 对实投影空间 $\mathbb{R}P^n$, 我们有

$$H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \text{ 或 } k = n \text{ 为奇数}, \\ \mathbb{Z}/2, & k \text{ 奇且 } 0 < k < n, \\ 0, & k > 0 \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

证明 给 $X = S^n$ 以这样的 CW 分解：它在每个维数均有两个胞腔 (上半球和下半球), 记为 E_+ 和 E_-, 这样它的 k 维骨架 $X^k = S^k$, 于是有

$$S^n \supseteq S^{n-1} \supseteq \cdots \supseteq S^1 \supseteq S^0.$$

$\mathbb{R}P^n$ 的 CW 分解为每个维数只有一个胞腔 (参见 (26.27)):

$$\mathbb{R}P^n \subseteq \mathbb{R}P^{n-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{R}P^1 \supseteq \mathbb{R}P^0.$$

由 (29.1), $H_k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}) = \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n$. 其母元记为 e'_k. 下面我们来定出 $\partial e'_k$.

为此，先考虑 S^n 的情形. 设 $A: S^n \to S^n$ 为对径映射，于是它将 E^k_+ 同胚地映为 E^k_-, 反之亦真. 以 f_k 表合成

$$(E^k, S^{k-1}) \to (E^k_+, S^{k-1}) \subset (S^k, S^{k-1}),$$

其中第一个箭头为同胚. 以 ι_k 表 $H_k(E^k, S^{k-1})$ 的母元，于是 $f_{k*}(\iota_k) = e_k$ 为 $H_k(S^k, S^{k-1})$ 的一个基元. 设其与 k 胞腔 E^k_+ 对应. 由可换图

$$\begin{array}{ccccc} (E^k, S^{k-1}) & \to & (E^k_+, S^{k-1}) & \subset & (S^k, S^{k-1}) \\ & & \downarrow A & & \downarrow A \\ & & (E^k_-, S^{k-1}) & \subset & (S^k, S^{k-1}), \end{array}$$

知 $A_*(e_k)$ 和 E_-^k 对应. 于是 $H_k(S^k, S^{k-1})$ 的两个自由基元为 $\{e_k, A_*(e_k)\}$.

现在来决定 $\partial_k : H_k(S^k, S^{k-1}) \to H_{k-1}(S^{k-1}, S^{k-2})(k \geq 1)$, 考虑可换图

$$\begin{array}{ccccc}
H_k(S^k, S^{k-1}) & & \xrightarrow{\partial_k} & & H_{k-1}(S^{k-1}, S^{k-2}) \\
| & \searrow \partial' & & \nearrow j & | \\
| & & H_{k-1}(S^{k-1}) & & | \\
A_*| & & \downarrow A_* & & |A_* \\
| & & H_{k-1}(S^{k-1}) & & | \\
\downarrow & \nearrow \partial' & & \searrow j & \downarrow \\
H_k(S^k, S^{k-1}) & & \xrightarrow{\partial_k} & & H_{k-1}(S^{k-1}, S^{k-2})
\end{array}$$

已知 $A : S^{k-1} \to S^{k-1}$ 的度数为 $(-1)^k$, 故对 $e_k \in H_k(S^k, S^{k-1})$ 有

$$\partial_k A_*(e_k) = j\partial' A_*(e_k) = jA_*\partial' e_k = (-1)^k j\partial' e_k = (-1)^k \partial_k e_k.$$

因此 $e_k + (-1)^{k+1} A_* e_k \in \mathrm{Ker}\partial_k$. 实际上, 它生成 $\mathrm{Ker}\partial_k$. 这一点可如下证明. 设 $(m_1 e_k + m_2 A_* e_k) \in \mathrm{Ker}\partial_k$, 即

$$\partial_k(m_1 e_k + m_2 A_* e_k) = 0.$$

那么

$$m_1 \partial_k e_k + m_2 (-1)^k \partial_k e_k = (m_1 + (-1)^k m_2)\partial_k e_k = 0.$$

于是或者 $(m_1 + (-1)^k m_2) = 0$, 或者 $\partial_k e_k = 0$ (因为 $H_{k-1}(S^{k-1}, S^{k-2})$ 为自由群). 但 $\partial_k e_k \neq 0$. 这是因为, 如果 $\partial_k e_k = 0$, 则 $\partial_k A_* e_k = (-1)^k \partial_k e_k = 0$, 这样 ∂_k 为零同态. 于是

$$\mathrm{Ker}\partial_{k-1} = \frac{\mathrm{Ker}\partial_{k-1}}{\mathrm{Im}\partial_k} = H_{k-1}(D_*(S^n)) = H_{k-1}(S^n),$$

故当 $k>1$ 时， $\mathrm{Ker}\partial_{k-1}=0$, 与已证明的 $\mathrm{Ker}\partial_{k-1}$ 中含有 $e_{k-1}+(-1)^kA_*e_{k-1}$ 矛盾；当 $k=1$ 时，一方面按上面的讨论 $\mathrm{Ker}\partial_0=H_0(S^n)$, 但 $H_0(S^n)=\mathbb{Z}$, 故 $\mathrm{Ker}\partial_0=\mathbb{Z}$. 而另一方面，$\partial_0:H_0(S^0,\emptyset)\to 0$, 故 $\mathrm{Ker}\partial_0=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 矛盾．既然 $\partial_ke_k\neq 0$, 故 $m_1+(-1)^km_2=0$, 即 $m_2=(-1)^{k+1}m_1$.

这样 $e_k+(-1)^{k+1}A_*e_k$ 生成 $\mathrm{Ker}\partial_k$. 已知 $H_k(S^n)=0$, $0<k<n$, 因此 $\mathrm{Ker}\partial_k=\mathrm{Im}\partial_{k+1}$. 而 $\mathrm{Im}\partial_{k+1}$ 由 $\partial_{k+1}e_{k+1}$ 生成 (因为 $\partial_{k+1}(A_*e_{k+1})=(-1)^{k+1}\partial_{k+1}e_{k+1}$), 因此

$$\partial_{k+1}e_{k+1}=\pm(e_k+(-1)^{k+1}A_*e_k).$$

不妨取正号．（注意上式在 $k=0$ 时也成立.）

自然投射 $\pi:(S^k,S^{k-1})\to(\mathbb{R}P^k,\mathbb{R}P^{k-1})$ 限制在 E_+^k (E_-^k) 上为相对同胚，因此 $H_k(\mathbb{R}P^k,\mathbb{R}P^{k-1})$ 的母元 e_k' 可取为 $\pi_k(e_k)$. 于是

$$\pi_*(A_*e_k)=(\pi\circ A)_*e_k=\pi_*e_k=e_k'.$$

因此，对于 e_k' 而言，我们有

$$\begin{aligned}\partial_{k+1}(e_{k+1}')&=\partial_{k+1}\pi_*e_{k+1}=\pi_*\partial_{k+1}e_{k+1}\\&=\pi_*(e_k+(-1)^{k+1}A_*e_k)\\&=e_k'+(-1)^{k+1}e_k'=\begin{cases}2e_k', & k\text{ 奇}.\\ 0, & k\text{ 偶}.\end{cases}\end{aligned}$$

这样 $D_*(\mathbb{R}P^n)=\{H_k(\mathbb{R}P^k,\mathbb{R}P^{k-1}),\partial_k\}$ 完全定出，而定理得证.

第七章　一般系数的同调论

我们在 §21 的最后，介绍了同调论的 Eilenberg-Steenrod 公理. 它们一共有七条. 在 §28 中，又对 CW 空间偶及其间的映射上所定义的这种同调论，证明了它的唯一性. 至于它的存在性，也已解决. 现在考虑七条公理中的最后一条，即

维数公理：　如果 P 是由一点所构成的空间，那么

$$H_n(P)=\begin{cases}0, & n\neq 0,\\ \mathbb{Z}, & n=0.\end{cases}$$

由于 $H_0(P)=\mathbb{Z}$, 所以通常我们称适合这样七条公理的同调论为整系数同调论. 同样，如果，将 $\mathbb{Z}$ 换为一般的 (可换) 群 G, 即第七条公理改为如下的

维数公理：　如果 P 是由一点所构成的空间，则

$$H_n(P)=\begin{cases}0, & n\neq 0,\\ G, & n=0.\end{cases}$$

那么，这时自然也就发生系数为 G 的同调论的存在性和唯一性的问题. 如果这两个问题有肯定的答案. 那么又会产生，不同的系数群的同调论之间彼此有何联系. 这些就是本章所要考虑的问题.

§30.　张量积和挠积

现在我们来考虑系数为 G 的同调论是否存在的问题.

为此，我们先回忆单纯同调论是如何建立的. 这时，我们选取基本组 $\{\sigma_i^k|i=1,\cdots,\alpha_k\}$, 然后做

$$C_k(K)=\left\{\sum_{i=1}^{\alpha_k}a_i\sigma_i^k\middle|a_i\in\mathbb{Z}\right\}.$$

因此，将系数从 $\mathbb{Z}$ 换为 G，也就是说，命

$$C_k(K,G)=\left\{\sum_{i=1}^{\alpha_k}a_i\sigma_i^k\middle|a_i\in G\right\}.$$

为系数取自 G 的 k 维链群，而边缘运算为

$$\partial_k^G:\ \ C_k(K,G)\to C_{k-1}(K,G),$$

$$\sum_i a_i\sigma_i^k\mapsto\sum_i a_i(\partial\sigma_i^k).$$

那么 $\partial_k^G\partial_{k+1}^G=0$ 成立．从而就可以做商群

$$H_k(K,G)=\frac{\mathrm{Ker}\partial_k^G}{\mathrm{Im}\partial_{k+1}^G}.$$

当 $K=P$ 时，得

$$H_k(P,G)=\begin{cases}G, & k=0,\\ 0, & k\neq 0.\end{cases}$$

这样，以 G 为系数的同调群就定义好．当然，为了证明它是同调论，得验证其他的几条公理也成立．在下一节正式证明它是同调论之前，我们先仔细地研究一下 $C_k(K,G)$ 的结构．首先留意

$$C_k(K,G)\neq G\times C_k(K). \tag{1}$$

(1) 的右端是群 $C_k(K)$ 和 G 的卡氏积．这是因为卡氏积的运算是按分量进行，特别

$$(g,\sigma)+(g',\sigma')=(g+g',\sigma+\sigma').$$

而 (1) 的右端，如果将 $g\sigma$ 记为 (g,σ) 的话，其运算为

$$\begin{aligned}&(g,\sigma)+(g',\sigma)=(g+g',\sigma),\\&(g,\sigma)+(g,\sigma')=(g,\sigma+\sigma').\end{aligned}\tag{2}$$

所以 (1) 成立. 但从 (2), 知 $C_k(K,G)$ 就是在由 $G\times C_k(K)$ 生成的自由群中, 引入关系 $(g,\sigma)+(g,\sigma)-(g+g',\sigma)$ 和 $(g,\sigma)+(g,\sigma')-(g,\sigma+\sigma')$. 而这正是 $G\otimes C_k(K)$ (见 §13). 因此, 为了深入研究系数为 G 的同调论, 我们先来讨论一下张量积.

30.1　命题　如果 $f:A\to A', g:B\to B'$ 为同态, 那么它们导出一个同态

$$f\otimes g:\ A\otimes B\to A'\otimes B'.$$

$$a\otimes b\mapsto fa\otimes gb.$$

证明　直接验证即知.　◁

30.2　命题　存在着同构

$$\varphi:\ A\otimes B\cong B\otimes A,$$

$$a\otimes b\mapsto b\otimes a,$$

和

$$\psi:\ (A\otimes B)\otimes C\to A\otimes(B\otimes C),$$

$$(a\otimes b)\otimes c\mapsto a\otimes(b\otimes c).$$

证明　直接验证即知.　◁

30.3　命题　如果 $A=\sum\limits_j A_j$, 则 $A\otimes B\cong\sum\limits_j(A_j\otimes B)$, 又

$$\mathbb{Z}\otimes G\cong G.$$

于是当 A,B 分别是以 $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ 为基的自由可换群时, $A\otimes B$ 是以 $\{a_i\otimes b_j\}$ 为基的自由可换群.

证明　在证明之前, 我们先回顾一下直和 $A=\sum\limits_j A_j$ 的定义. 给定一族群 $A_j(j\in J)$, 直和 $\sum\limits_j A_j$ 的元为 $(a_j)_{j\in J}$, 其中除

有限个外，其他的 a_j 均为 0. 两个这种元 (a_j) 和 (a'_j) 的和是 $(a_j + a'_j)$. 现在设

$$\alpha_j : A_j \to \sum_j A_j = A$$

为置入映射，命

$$p: \ A \otimes B \to \sum_j (A_j \otimes B)$$
$$(a_j) \otimes b \mapsto (a_j \otimes b)$$

$$q: \ \sum_j (A_j \otimes B) \to A \otimes B$$
$$(x_j) \mapsto \sum_j (\alpha_j \otimes 1) x_j.$$

那么

$$\begin{aligned} qp((a_j) \otimes b) &= q((a_j \otimes b)) = \sum_j (\alpha_j \otimes 1)(a_j \otimes b) \\ &= \sum_j (\alpha_j a_j \otimes 1 \cdot b) = (a_j) \otimes b. \end{aligned}$$

所以 $qp = 1$. 为了验证 $pq = 1$, 显然只要对 $x_j = a_j \otimes b$ 验证就可以了. 这时

$$\begin{aligned} pq((a_j \otimes b)) &= p\left(\sum_j (\alpha_j \otimes 1)(a_j \otimes b)\right) \\ &= p\left(\sum_j (\alpha_j a_j \otimes 1 \cdot b)\right) \\ &= p((a_j) \otimes b) = (a_j \otimes b). \end{aligned}$$

所以 p 和 q 均为同构.

至于 $\mathbb{Z} \otimes G \cong G$, 由

$$\theta: \ \mathbb{Z} \otimes G \to G$$

$$n \otimes g \mapsto ng$$

$$\theta' : G \to \mathbb{Z} \otimes G$$

$$g \mapsto 1 \otimes g$$

显然适合 $\theta\theta' = 1, \theta'\theta = 1$ 而知. ◁

30.4　推论　如果 $A = \sum_i A_i, B = \sum_j B_j$, 那么 $A \otimes B \cong \sum_{i,j} A_i \otimes B_j$. ◁

30.5　命题　如果 $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ 正合, 那么对任意的 G,

$$A \otimes G \xrightarrow{\alpha\otimes 1} B \otimes G \xrightarrow{\beta\otimes 1} C \otimes G \to 0$$

也正合. 但右端同时添上 0 则不成立, 除非 G 自由.

证　命

$$\phi:\ C \times G \to B \otimes G/\mathrm{Im}(\alpha \otimes 1)$$

$$(c, g) \mapsto [b \otimes g],$$

其中 b 使 $\beta(b) = c$ 成立, 又方括号表剩余类.

不难相信, 这个定义和 b 的不同取法无关. 实际上, 若 b' 使 $\beta(b') = c$, 则 $\beta(b - b') = c - c = 0$, 因此由正合性, 有 a 使 $\alpha(a) = b - b'$. 这样

$$\begin{aligned} [b \otimes g] &= [(b' + \alpha(a)) \otimes g] = [b' \otimes g + \alpha(a) \otimes g] \\ &= [b' \otimes g + (\alpha \otimes 1)(a \otimes g)] = [b' \otimes g]. \end{aligned}$$

显然, ϕ 是双线性的, 因此导出

$$\theta : C \otimes G \to B \otimes G/\mathrm{Im}(\alpha \otimes 1).$$

另一方面, 由于 $\mathrm{Im}(\alpha\otimes 1)\subset \mathrm{Ker}(\beta\otimes 1)$, 故 $\beta\otimes 1$ 导出

$$\overline{\beta\otimes 1}:\ B\otimes G/\mathrm{Im}(\alpha\otimes 1)\to C\otimes G,$$

$$[b\otimes g]\mapsto \beta b\otimes g.$$

而 $\beta\otimes 1=\overline{\beta\otimes 1}\circ\pi$, 这里 $\pi: B\otimes G\to B\otimes G/\mathrm{Im}(\alpha\otimes 1)$ 为自然投射. 直接验证可知 $\overline{\beta\otimes 1}$ 和 θ 互为逆, 因此都是同构. 这样 $\mathrm{Im}(\alpha\otimes 1)=\mathrm{Ker}(\pi)=\overline{\beta\otimes 1}\circ\pi=\mathrm{Ker}(\beta\otimes 1)$, 即在 $B\otimes G$ 处, 正合性成立. 在 $C\otimes G$ 处的正合性显然.

至于最后一句话, 显然成立, 余下的由下例即知.

$$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{\times 2}\mathbb{Z}\xrightarrow{\pi}\mathbb{Z}/2\to 0$$

正合, 其中 $\times 2$ 表示将 $n(\in\mathbb{Z})$ 变为 $2n$ 的同态, π 是自然投射. 但列

$$0\to\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\xrightarrow{(\times 2)\otimes 1}\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\xrightarrow{\pi\otimes 1}\mathbb{Z}/2\otimes\mathbb{Z}/2\to 0$$

不正合. 实际上 $((\times 2)\otimes 1)(1\otimes\bar{1})=2\otimes\bar{1}=1\otimes 2\cdot\bar{1}=1\otimes\bar{0}=0$! (这里 $\bar{1}$ 表示 $\mathbb{Z}/2$ 中 1 的剩余类). ◁

30.6 命题 给定链复形 $\{C_n,\partial_n\}$ 和群 G, 那么 $\{C_n\otimes G,\partial_n\otimes 1\}$ 也是链复形.

证明 直接验证即可. ◁

30.7 定义 链复形 $C=\{C_n,\partial_n\}$ 的以 G 为系数群的同调群.

$$H_*(C,G)=H_*(C_n\otimes G).$$

¡ 同样可以定义带增广的 C 的以 G 为系数群的约化同调群.

30.8 命题 对于给定的群 G, 存在一个自由的非负链复形 $C_*(G)$, 使

$$H_n(C_*(G))=\begin{cases}0, & n>0,\\ G, & n=0.\end{cases}$$

这个链复形叫做 G 的 **预解式**.

¡ 预解式并不唯一！

证明 命 $C_0(G)=F(G)$, 即由 G 的元自由生成的可换群. $\eta: F(G)\to G$ 为自然投射. 命 $C_1(G)=\mathrm{Ker}\eta, C_i(G)=0, i\geq 2$. 于是下面的列正合:

$$\cdots\to 0\to C_1(G)\xrightarrow{\partial_1=i}C_0(G)\xrightarrow{\eta}G\to 0.$$

这样链复形 $\{C_i(G),\partial_i\}$ 具有所需的性质. 命题得证. ◁

¡ 1) G 的预解式 $\{C_i(G),\partial_i\}$ 使列

$$\cdots\to C_n(G)\to C_{n-1}(G)\to\cdots\to C_1(G)\to C_0(G)\to G\to 0$$

正合 (参见 6.18).

2) 上面所作的链复形叫做群 G 的 **最短预解式**.

30.9 命题 如果 $\tilde{\varphi}: G\to G'$ 为群同态, 那么在 G 和 G' 的预解式间存在链映射 $\varphi=\{\varphi_n: C_n(G)\to C_n(G')\}$ 使图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \to & C_n(G) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(G) & \to & \cdots & \to & C_1(G) & \xrightarrow{\partial_1}\\
& & \downarrow\varphi_n & & \downarrow\varphi_{n-1} & & & & \downarrow\varphi_1 & \\
\cdots & \to & C_n(G') & \xrightarrow{\partial'_n} & C_{n-1}(G') & \to & \cdots & \to & C_1(G') & \xrightarrow{\partial'_1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
C_0(G) & \xrightarrow{\eta} & G & \to & 0\\
\downarrow\varphi_0 & & \downarrow\tilde{\varphi} & & \\
C_0(G') & \xrightarrow{\eta'} & G' & \to & 0
\end{array}$$

可换. 于是 $H_0(\varphi)=\tilde{\varphi}: G\to G'$. 适合上述条件的链映射称为 $\tilde{\varphi}$ 的 **提升**, 它们虽不唯一, 但彼此之间链同伦,

证明 只要注意链复形 $\{C_i(G),\partial_i\}$ 是自由的, 而 $\{C_i(G'),\partial'_i\}$ 使上图的下面一行正合. 故由 (15.16) 得证. ◁

30.10 命题 给定群 G 和 A, 那么

$$H_n(C_*(G)\otimes A)$$

完全由 G 和 A 决定，而与 G 的预解式 $C_*(G)$ 的取法无关. 而且

$$H_0(C_*(G)\otimes A)=G\otimes A,$$

$$H_i(C_*(G)\otimes A)=0,\quad i\geq 2.$$

又给定 $\tilde{\varphi}:G\to G'$, 则 $H_n(\varphi\otimes 1)$ 和 $\tilde{\varphi}$ 的提升 φ 无关，完全由 $\tilde{\varphi}$ 决定，故记为 $H_n(\tilde{\varphi}\otimes 1):H_n(C_*(G)\otimes A)\to H_n(C_*(G')\otimes A)$.

证明 设

$$\cdots\to C_n\to C_{n-1}\to\cdots\to C_1\to C_0\to G\to 0$$

和

$$\cdots\to C'_n\to C'_{n-1}\to\cdots\to C'_1\to C'_0\to G\to 0$$

均为 G 的预解式. 那么对 $id:G\to G$ 用 (30.9), 知有 id 的提升 $\{\psi_n:C_n\to C'_n\}$ 使 $H_0(\psi)=id$, 又有 $\{\theta_n:C'_n\to C_n\}$ 使 $H_0(\theta)=id$. 再者， $\{\theta_n\circ\psi_n:C_n\to C'_n\to C_n\}$ 也是 id 的一个提升. 因此仍由 (30.9), 知 $\theta\circ\psi\simeq id:C\to C$, 同理 $\psi\circ\theta\simeq id:C'\to C'$. 于是 $\{\psi_n\otimes 1:C_n\otimes A\to C'_n\otimes A\}$ 为链等价，故 $H_n(\psi\otimes 1):H_n(C_*(G)\otimes A)\to H_n(C'_*(G)\otimes A)$ 为同构，即 $H_n(C_*(G)\otimes A)$ 和 $C_*(G)$ 的取法无关.

既然 $H_n(C_*(G)\otimes A)$ 和 $C_*(G)$ 的取法无关，因此在计算它们时可取任意一个预解式. 特别可取最短预解式 ($C_i=0,i\leq 2,C_1=\ker\eta,C_0=F(G)$)

$$\cdots\to 0\to C_1\to C_0\to G\to 0.$$

这时相应的 $C_*(G)\otimes A$ 为

$$\cdots\to 0\to C_1\otimes A\to C_0\otimes A\to G\otimes A\to 0.\qquad(3)$$

于是由 (30.5), 得

$$H_0(C_*(G)\otimes A)=G\otimes A,$$

又由 $C_i=0, i\geq 2$, 故得

$$H_i(C_*(G)\otimes A)=0,\quad i\geq 2.$$

最后来证明 $H_n(\varphi\otimes 1)$ 唯一. 这时由 $\tilde{\varphi}$ 的不同提升为链同伦的 (30.9), 故和 1 作张量积仍链同伦, 而知 $H_n(\varphi\otimes 1)$ 完全由 $\tilde{\varphi}$ 决定. ◁

30.11 定义 给定群 G 和 A, 以及同态 $\tilde{\varphi}: G\to G'$, 定义 G 和 A 的挠积为

$$\mathrm{Tor}(G,A)=H_1(C_*(G)\otimes A),$$

$$\mathrm{Tor}(\tilde{\varphi},1)=H_1(\tilde{\varphi}\otimes 1):\mathrm{Tor}(G,A)\to\mathrm{Tor}(G',A).$$

¡ 1) 这个定义由 (30.10) 知为合理. 因为它们和 G 的预解式 $C_*(G)$ 及 $\tilde{\varphi}$ 的提升 φ 的取法无关.

2) 由最短预解式的定义, (28.5) 及挠积定义, 知

$$0\to\mathrm{Tor}(G,A)\to C_1\otimes A\to C_0\otimes A\to G\otimes A\to 0 \qquad (4)$$

正合.

对 $f: A\to A'$, 显然有链映射

$$1\otimes f: C_*(G)\otimes A\to C_*(G)\otimes A'.$$

于是得同态

$$H_1(1\otimes f): H_1(C_*(G)\otimes A)\to H_1(C_*(G)\otimes A').$$

以后将它记为

$$\mathrm{Tor}(1,f):\mathrm{Tor}(G,A)\to\mathrm{Tor}(G,A').$$

30.12 命题 Tor 具有以下的性质:

1) 如果 G 自由, 那么 $\mathrm{Tor}(G,A)=0$,

2) $\mathrm{Tor}(G,A)\cong\mathrm{Tor}(A,G)$,

3) 如果 A 自由, 那么 $\mathrm{Tor}(G,A)=0$,

4) 如果 $0\to A\to B\to C\to 0$ 正合, 那么对任意的群 G, 列

$$0\to \mathrm{Tor}(G,A)\to \mathrm{Tor}(G,B)\to \mathrm{Tor}(G,C)\to$$

$$\to G\otimes A\to G\otimes B\to G\otimes C\to 0$$

正合.

证明 如果 G 自由, 那么取如下的预解式

$$C_n(G)=\begin{cases}0, & n\neq 0,\\ G, & n=0.\end{cases}$$

于是得 1).

2) 设 G,A 的预解式分别为

$$0\to R\to F\to G\to 0,$$

$$0\to K\to H\to A\to 0.$$

则由 (4), (30.2) 和 (30.5), 有行 (列) 正合的可换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & \mathrm{Tor}(A,G) & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \to & R\otimes K & \to & F\otimes K & \to & G\otimes K & \to & 0\\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \to & R\otimes H & \to & F\otimes H & \to & G\otimes H & \to & 0\\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Tor}(G,A) & \to & R\otimes A & \to & F\otimes A & \to & G\otimes A & \to & 0\\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

由此图, 可从 $\mathrm{Tor}(G,A)$ 经 "上台阶" 到 $\mathrm{Tor}(A,G)$. 这是一个唯一决定的同态 (请自行验证). 反之可 "下台阶", 而且它们互为逆. 故得 2).

3) 由 1) 和 2) 即知.

4) 设 $C_*(G)$ 为 G 的预解式，那么由于 $C_n(G)$ 是自由的，故由 (30.5)，知链复形的列

$$0 \to C_*(G) \otimes A \to C_*(G) \otimes B \to C_*(G) \otimes C \to 0$$

正合．因此由 (15.18)，得同调的长正合列，而这就是所要证的．

¡ 利用 $\otimes$ 和 Tor 的对称性，还可在 4) 的结论中，增加列

$$0 \to \mathrm{Tor}(A, G) \to \mathrm{Tor}(B, G) \to \mathrm{Tor}(C, G) \to$$

$$\to A \otimes G \to B \otimes G \to C \otimes G \to 0$$

也正合这个结论．

§31. 一般系数的同调论和万有系数定理

有了张量积 $\otimes$ 和挠积 Tor 以后，我们可以严格地来回答一般系数的同调论的存在性和唯一性，以及不同系数的同调论之间有何联系的问题．

31.1 定义 空间偶 (X, A) 的系数取自可换群 G 的连续链复形

$$S_*(X, A; G) = S_*(X, A) \otimes G.$$

它的同调群叫做 (X, A) 的具有系数 G 的连续同调群，记为

$$H_*(X, A; G) = H_*(S_*(X, A; G)).$$

¡ $S_*(X, A; \mathbb{Z}) = S_*(X, A) \otimes \mathbb{Z} = S_*(X, A)$，因此整系数是 $G = \mathbb{Z}$ 这个特殊情况．

显然，$f : (X, A) \to (Y, B)$ 导出链映射

$$S_*(f) \otimes 1 : S_*(X, A; G) \to S_*(Y, B; G),$$

因此导出同调群间的同态

$$f_* : H_*(X, A; G) \to H_*(Y, B; G).$$

31.2　命题　恒同映射 $id:(X,A)\to(X,A)$ 导出恒等同态

$$(id)_*=1:H_*(X,A;G)\to H_*(X,A;G),$$

又若 $f:(X,A)\to(Y,B),g:(Y,B)\to(Z,C)$ 为偶间的映射，那么

$$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*:H_*(X,A;G)\to H_*(Z,C;G).$$

证明　由定义即知.　◁

31.3　命题　以 P 表示由一点所构成的空间，那么

$$H_n(P;G)=\begin{cases}0, & n\neq 0,\\ G, & n=0.\end{cases}$$

证明　按定义直接计算即知.　◁

31.4　定义　设 $0\to G'\to G\to G''\to 0$ 为群的正合序列，那么对空间偶 (X,A), 列

$$0\to S_*(X,A;G')\to S_*(X,A;G)\to S_*(X,A;G'')\to 0$$

也是正合序列. 故有

$$\triangle_k:H_k(X,A;G'')\to H_{k-1}(X,A;G')$$

(参见 (15.17)). 特别，由 $0\to\mathbb{Z}/2\to\mathbb{Z}/4\to\mathbb{Z}/2\to 0$ 决定的 $\triangle_k$ 叫做 Bockstein 同态. 记为 β_k.

31.5　命题　对空间偶 (X,A), 规定 $H_*(X,A;G)$ 为其同调群，那么我们就得到系数群 (即 $H_0(P;G)$) 为 G 的同调论.

证明　(31.3) 已证 $H_0(P;G)=G$.

其它的公理, 由于 $S_*(X,A;G)=S_*(X,A)\otimes G$, 而 $S_*(X,A)$ 导出的同调群适合这些公理，所以经 $\otimes G$ 后，就可以得到 $S_*(X,A;G)$ 导出的同调群 $H_*(X,A;G)$ 也适合这些公理.　◁

31.6　定理　对于 CW 偶 (X,A), 适合 Eilenberg-Steenrod 公理的同调论 (系数群为 G) 唯一存在.

证明 存在性上面已说. 唯一性可重复 (26.2) 而得证. ◁

31.7 定理 (万有系数定理的代数形式) 如果 C 是自由链复形, G 为可换群, 那么列

$$0 \to H_n(C) \otimes G \xrightarrow{\mu} H_n(C \otimes G) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C), G) \to 0$$

正合而且可分裂, 但不自然.

证明 因为 C 自由, 故 C_n 及其子群 $\mathrm{Ker}\partial_n = Z_n, \mathrm{Im}\partial_{n+1} = B_n$ 也都自由. 正合列

$$0 \to B_n \xrightarrow{j_n} Z_n \to H_n(C) \to 0$$

导出以下的正合列 (28.12):

$$0 \to \mathrm{Tor}(H_n(C), G) \xrightarrow{g} B_n \otimes G \xrightarrow{j_n \otimes 1} Z_n \otimes G \to H_n(C) \otimes G \to 0.$$

于是

$$\mathrm{Ker}(j_n \otimes 1) = \mathrm{Tor}(H_n(C), G),$$

$$\mathrm{Coker}(j_n \otimes 1) = H_n(C) \otimes G.$$

另一方面, 在短正合列

$$0 \to Z_n \xrightarrow{i_n} C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \to 0,$$

中, 由于 B_{n-1} 自由, 故它分裂, 于是有 $k_n : C_n \to Z_n$ 使 $k_n i_n = 1 : Z_n \to Z_n$; 又 $\mathrm{Tor}(B_{n-1}, G) = 0$, 故列

$$0 \to Z_n \otimes G \xrightarrow{i_n \otimes 1} C_n \otimes G \xrightarrow{\partial_n \otimes 1} B_{n-1} \otimes G \to 0$$

正合, 而且 $(k_n \otimes 1)(i_n \otimes 1) = 1$.

现在命链复形

$$\mathcal{Z} = \{Z_n \otimes G, 0\},$$

$$\mathcal{C} = \{C_n \otimes G, \partial_n \otimes 1\},$$

$$\mathcal{B} = \{B_{n-1} \otimes G, 0\}.$$

那么有链复形的短正合列

$$0 \to \mathcal{Z} \to \mathcal{C} \to \mathcal{B} \to 0.$$

它导出长正合列 (15.18)

$$\cdots \to H_{n+1}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(\mathcal{Z}) \xrightarrow{(i\otimes 1)_*} H_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{(\partial\otimes 1)_*} H_n(\mathcal{B})$$

$$\xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathcal{Z}) \to \cdots.$$

注意, $H_{n+1}(\mathcal{B}) = B_n \otimes G, H_n(\mathcal{Z}) = Z_n \otimes G$, 又由“下台阶”定义, 知 $\partial_{n+1} = j_n \otimes 1$, 因此由短正合列

$$0 \to \mathrm{Coker}\partial_{n+1} \xrightarrow{(i\otimes 1)_*} H_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{(\partial\otimes 1)_*} \mathrm{Ker}\partial_n \to 0$$

得正合列

$$0 \to \mathrm{Coker}(j_n \otimes 1) \to H_n(C \otimes G) \to \mathrm{Ker}(j_{n-1} \otimes 1) \to 0,$$

即

$$0 \to H_n(C) \otimes G \xrightarrow{\mu} H_n(C \otimes G) \xrightarrow{(\partial\otimes 1)_*} \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C), G) \to 0,$$

这里 $\mu([z_n] \otimes g) = [z_n \otimes g]$. 这个短正合列由于 $(i \otimes 1)_*$ 有右逆 $(k \otimes 1)_*$, 故分裂. ◁

31.8 推论 (万有系数定理) 对空间偶 (X, A), 我们有短正合列

$$0 \to H_n(X, A) \otimes G \to H_n(X, A; G)$$

$$\to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X, A), G) \to 0,$$

这个列分裂但不自然. ◁

¡在上式中, $H_n(X, A) \otimes G$ 影响 $H_n(X, A; G)$ 容易理解, 可 $\mathrm{Tor}(H_{n-1}(X, A); G)$ 的出现表示 $(n-1)$ 维的同调群 $H_{n-1}(X,$

A) 也会影响 $H_n(X, A; G)$. 这似乎不大好理解. 请仔细体会下例在这方面所提供的几何意义.

31.9 例 对于实投影空间 $\mathbb{R}P^n$, 我们有

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & 0 \le k \le n, \\ 0, & \text{其它情形}. \end{cases}$$

这只要注意 $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) = 0$, $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ 即可.

以上我们将同调论从整系数的情形推广到了任意的 (可换) 群. 实际上, 我们也可以考虑以 R 模为系数的同调论.

以下设 R 为具有单位的交换环.

31.10 定义 环 R 上的链复形 $C = \{C_n, \partial_n\}$ 是由一串 R 模 C_n 和 R 模同态 ∂_n. 构成的序列, 适合条件: $\partial_n\partial_{n+1} = 0$. 由此可得同调模

$$H_n(C) = \mathrm{Ker}\partial_n / \mathrm{Im}\partial_{n+1}.$$

以前对 $\mathbb{Z}$ 上的链复形所做的讨论, 诸如链映射, 链同伦, 增广链复形, 链复形的短正合序列导出同调的长正合序列等, 均可转移到环 R 上的链复形来.

对于 R 模 A 和 B, 我们也可以定义它们在 R 上的张量积 $A \otimes_R B$. 这时是在 $A \otimes B$ 上引进关系:

$$r(a \otimes b) = (ra) \otimes b = a \otimes rb.$$

故也是 R 模. 在不致引起混淆时, 将 $A \otimes_R B$ 略为 $A \otimes B$.

31.11 命题 设 $C = \{C_n, \partial_n\}$ 为环 R 上的链复形, G 为 R 模. 那么 $C \otimes_R G = \{C_n \otimes_R G, \partial_n \otimes 1\}$ 也还是 R 上的链复形. ◁

若 C, C' 均为 R 上的链复形, G, G' 均为 R 模, 那么当 $\tau : C \to C'$ 为链映射时, $\tau \otimes 1 : C \otimes G \to C' \otimes G$ 也是. 又 $\varphi : G \to G'$ 若为 R 同态, 那么 $1 \otimes \varphi : C \otimes G \to C \otimes G'$ 为链映射.

证明 直接验证即知. ◁

31.12 定义 R 上的链复形 C 的系数为 R 模 G 的同调模

$$H_n(C;G) = H_n(C \otimes_R G).$$

当 τ, φ 为 (31.11) 中所述时, 有

$$\tau_* : H_n(C;G) \to H_n(C';G)$$

和

$$\varphi_* : H_n(C;G) \to H_n(C;G').$$

¡ 由于可换群及同态是 $\mathbb{Z}$ 模和 $\mathbb{Z}$ 同态, 故系数为群 G 的同调论是现在讨论的 R 模系数在 $R = \mathbb{Z}$ 时的特殊情况.

31.13 例 对复形 K, 我们有 ($\mathbb{Z}$ 上的) 链复形 $C(K)$.

我们可以把它视为环 R 上的链复形 (R 作用平凡). 于是当 G 为 R 模时, 我们有同调模

$$H_n(K;G) = H_n(C(K) \otimes G).$$

同样, 对空间 X, 将 $S(X)$ 视为环 R 上的链复形 (R 作用平凡), 那么对 R 模 G, 有同调模

$$H_n(X;G) = H_n(S(X) \otimes G).$$

约化同调模也可类似定义.

对于同调模也有相应公理化.

给定 R 模 G, 可以像群 ($\mathbb{Z}$ 模) 那样定义它的预解式 $C_*(G)$, 并证明 $H_n(C_*(G) \otimes A)$ 与 $C_*(G)$ 的取法无关, 从而有模 R 上的挠积 $\mathrm{Tor}_R^n(G,A) = H_n(C_*(G) \otimes A)$. 不过, 这时预解式中非零项增多 (除非 R 为主理想整环), 因此当 $n > 1$ 时, 挠积 $\mathrm{Tor}_R^n(G,A)$ 可能非零.

对于同调模, 当 R 为主理想整环时, 万有系数定理仍然成立. 实际上, 整个论证无多大改动.

§32. 函子 Hom 和 Ext

我们知道，上同调涉及 Hom，所以在讨论上同调之前，先对 Hom 做些讨论.

由于本节的结果可类似于 §30 而得到，因此将仅陈述大纲.

设 A 和 G 为群，命

$$\mathrm{Hom}(A,G)=\{f:A\to G|f\ \text{为同态}\},$$

则它可自然地成为一个群.

如果 $\varphi:A\to B$ 为同态，那么显然它导出

$$\varphi^{\#}:\ \mathrm{Hom}(B,G)\to\mathrm{Hom}(A,G)$$

$$f\mapsto f\circ\varphi.$$

而且 $\varphi^{\#}$ 为同态，并有

$$(\varphi\circ\psi)^{\#}=\psi^{\#}\circ\varphi^{\#}.$$

又若 $\theta:G\to G'$ 为同态，则它导出同态

$$\mathrm{Hom}(1,\theta):\ \mathrm{Hom}(A,G)\to\mathrm{Hom}(A,G'),$$

$$f\mapsto\theta\circ f.$$

对短正合列

$$0\to A\to B\to C\to 0,$$

一般我们只有正合列

$$0\to\mathrm{Hom}(C,G)\to\mathrm{Hom}(B,G)\to\mathrm{Hom}(A,G),$$

即右端不能添上 0. 因为最后一个箭头满, 表示 A 到 G 的同态可扩充到 B 上. 一般而言, 这当然不成立. 由于这个原因, 称 Hom 为左正合 (试与张量积 $\otimes$ 比较).

利用 Hom, 可以从链复形 $C=\{C_n,\partial_n\}$ 和群 G, 得到一个新的链复形, 不过, 这时边缘运算不是降低一个维数, 而是升高一个维数. 我们称这种链复形为上链复形. 它的具体作法如下: 给定链复形 $C=\{C_n,\partial_n\}$ 和 G, 命

$$\mathrm{Hom}(C,G)=\{\mathrm{Hom}(C_n,G),\partial_{n+1}^{\#}\}.$$

这时 $\partial_{n+1}^{\#}:\mathrm{Hom}(C_n,G)\to\mathrm{Hom}(C_{n+1},G)$, 而且 $\partial_{n+1}^{\#}\partial_n^{\#}=(\partial_n\partial_{n+1})^{\#}=0$.

和链复形的情形一样, 对上链复形, 由于 $\partial_{n+1}^{\#}\partial_n^{\#}=0$, 故可定义上同调群

$$H^n(\mathrm{Hom}(C,G))=\frac{\mathrm{Ker}\partial_n^{\#}}{\mathrm{Im}\partial_{n-1}^{\#}},$$

记为 $H^n(C;G)$, 叫做 C 的以 G 为系数的上同调群.

对上链复形, 有上链映射和上链同伦以及连接同态等概念.

类似于用张量积引出挠积, 我们也可用 Hom, 引出 Ext. 具体过程如下: 给定群 A 和 G, 利用 A 的预解式 $C_*(A)$ (28.8) 和 G, 做上链复形

$$\mathrm{Hom}(C_*(A),G).$$

可以证明, 它的同调群和 $C_*(A)$ 的取法无关, 而完全由 A 和 G 决定. 特别

$$H^0(C_*(A),G)=\mathrm{Hom}(A,G),$$

$$H^n(C_*(A),G)=0,\quad n\geq 2.$$

命

$$\mathrm{Ext}(A,G)=H^1(C_*(A),G).$$

和 Tor 一样，可以证明

1) 当 A 自由时， $\operatorname{Ext}(A,G)=0$,

2) 如果 $0\to A\to B\to C\to 0$ 为短正合列，那么有以下的正合列

$$0\to \operatorname{Hom}(C,G)\to \operatorname{Hom}(B,G)\to \operatorname{Hom}(A,G)\to$$

$$\to \operatorname{Ext}(C,G)\to \operatorname{Ext}(B,G)\to \operatorname{Ext}(A,G)\to 0.$$

不过，这时 $\operatorname{Ext}(A,G)\neq \operatorname{Ext}(G,A)$.

§33. 一般系数的上同调论

33.1 定义 对空间偶 (X,A) 和群 G, 命

$$S^n(X,A;G)=\operatorname{Hom}(S_n(X,A),G),$$

称它为 (X,A) 的以 G 为系数的 n 维连续上链群. $\{S^n(X,A;G),\partial^{\#}_{n+1}=\delta_n\}$ 为连续上链复形. 同调群

$$H^n(S^*(X,A;G))$$

叫做 (X,A) 的以 G 为系数的 n 维连续上同调群，记为 $H^n(X,A;G)$.

显然，给定 $f:(X,A)\to(Y,B)$, 它导出上链映射

$$\operatorname{Hom}(f,1):S^n(Y,B;G)\to S^n(X,A;G),$$

故有

$$H^n(f):H^n(Y,B;G)\to H^n(X,A;G).$$

33.2 命题 恒同映射 $id:(X,A)\to(X,A)$ 导出恒等同构. 又 $g:(Y,B)\to(Z,C)$, 则

$$H^n(g\circ f)=H^n(f)\circ H^n(g). \quad \triangleleft$$

对应于同调论的公理，我们有上同调论的公理.

空间偶上以 G 为系数的一个上同调论，是对每个空间偶 (X,A) 对应一串群 $H^n(X,A;G)$，又对于偶间映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 对应有一串同态 $H^n(f):H^n(Y,B;G)\to H^n(X,A;G)$, $n\in\mathbb{Z}$. 此外，对于偶 (X,A) 还有同态 $\delta^*:H^n(A,G)\to H^{n+1}(X,A;G)$. 它们适合

1) 若 $id:(X,A)\to(X,A)$ 为恒同映射，那么它导出上同调群间的恒同同构，

2) $H^n(g\circ f)=H^n(f)\circ H^n(g)$, 这里 f,g 为映射，

3) 图

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y,B;G) & \xrightarrow{H^n(f)} & H^n(X,A;G) \\ \delta^*\uparrow & & \uparrow\delta^* \\ H^{n-1}(B;G) & \xrightarrow{H^n(f|A)} & H^{n-1}(A;G) \end{array}$$

可换，

4) 列

$$\cdots\to H^n(A;G)\xrightarrow{\delta^*}H^{n+1}(X,A;G)\xrightarrow{H^{n+1}(j)}H^{n+1}(X;G)$$

$$\xrightarrow{H^{n+1}(i)}H^{n+1}(A;G)\to\cdots$$

正合，其中 i,j 为置入映射，

5) 如果 $f\simeq g$ 则 $H^n(f)=H^n(g)$,

6) 给定 (X,A), 如果 X 的子集 U 使 $\overline{U}\subset\mathring{A}$, 那么置入映射 $i:(X-U,A-U)\to(X,A)$ 导出上同调群间的同构映射，

7) 如果 P 是由一点构成的空间，那么

$$H^n(P;G)=\begin{cases}0, & n\neq 0,\\ G, & n=0.\end{cases}$$

33.3 定理 连续上同调群是空间偶 (X,A) 上的一个上同调论，即它适合 1)-7). 又限制在 CW 偶上，上同调论是唯一的.

证明　和同调论的情形一样证明. 不再细述. ◁

以前对同调论的许多讨论, 均可相应地搬到上同调论中来, 例如约化上同调, Mayer-Vietoris 序列等. 又在 CW 偶的情形, 上同调群也可用胞腔链复形 (29.1) 来予以计算.

利用 Ext, 我们可以证明下述的关于上同调的万有系数定理.

33.4　定理　对空间偶 (X,A) 和群 G, 我们有短正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X,A),G) \to H^n(X,A;G)$$

$$\xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}(H_n(X,A),G) \to 0.$$

这个列分裂但不自然.

证明　在 (29.6) 的证明中, 以 Hom, Ext 代 $\otimes$ 和 Tor 即可. ◁

由于

$$S^n(X,A;G) = \mathrm{Hom}(S_n(X,A),G).$$

故对 $\phi \in S^n(X,A;G), c \in S_n(X,A), \phi(c) \in G$. 以后命

$$\langle \phi, c\rangle = \phi(c).$$

这样

$$\langle,\rangle : S^n(X,A;G) \times S_n(X,A) \to G$$

是一个双线性的函数, 于是它导出同态

$$\langle,\rangle : S^n(X,A;G) \otimes S_n(X,A) \to G. \tag{1}$$

注意

$$\langle \phi, \partial c\rangle = \langle \delta\phi, c\rangle,$$

因此

$$\delta\phi = 0 \Longleftrightarrow \langle \delta\phi, c'\rangle = 0, \quad \forall c' \Longleftrightarrow \langle \phi, \partial c'\rangle = 0, \quad \forall c'.$$

又

$$\phi = \delta\phi' \Longleftrightarrow \langle \phi, c\rangle = \langle \delta\phi', c\rangle = \langle \phi', \partial c\rangle, \quad \forall c.$$

所以得

33.5 命题 $\phi \in S^n(X,A;G)$ 为上闭链的充要条件是 ϕ 为 $B_n(X,A)$ 的零化子.

$\phi \in S^n(X, A; G)$ 为上边缘，那么 ϕ 为 $Z_n(X, A)$ 的零化子. ◁

33.6 命题 同态 (1) 导出如下的配对

$$\langle\ ,\ \rangle:\ \ H^n(X,A;G)\otimes H_n(X,A)\to G$$

$$[\phi]\otimes[z]\mapsto\langle\phi,z\rangle.$$

因此有同态

$$\kappa: H^n(X,A;G)\to \mathrm{Hom}(H_n(X,A),G).$$

证明 这时只要验证 $\langle\phi,z\rangle$ 和 $[\phi]$ 及 $[z]$ 的代表选取无关. 实际上,

$$\begin{aligned}\langle\phi+\delta\phi',z+\partial c'\rangle &= \langle\phi,z\rangle+\langle\delta\phi',z+\partial c'\rangle+\langle\phi,\partial c'\rangle\\ &= \langle\phi,z\rangle+\langle\phi',\partial z+\partial\partial c'\rangle+\langle\delta\phi,c'\rangle\\ &= \langle\phi,z\rangle.\end{aligned}$$

◁

¡ 同态 κ 实际上就是 (33.4) 中的 α.

和同调论可以从系数为群 G 推广到 R 模 G 一样. 也可以考虑系数为 R 模的上同调论. 细节就不写出.

第八章　乘积空间的同调

对于乘积空间 $X\times Y$, 它的同调与 X 和 Y 的同调关系如何? 在 (22.7) 中, 就 $X=S^n$ 这一情形进行了讨论. 现在对一般的空间 X 来进行讨论.

§34. 链复形的张量积及其同调

34.1　定义　设 $C=\{C_n,\partial_n^C\}$ 和 $D=\{D_n,\partial_n^D\}$ 均为链复形. 命

$$(C\otimes D)_m=\sum_{i+j=m}C_i\otimes D_j,$$

$$\partial_\otimes(c\otimes d)=\partial^C c\otimes d+(-1)^c c\otimes\partial^D d$$ [1].

那么 $\{(C\otimes D)_m,\partial_\otimes\}$ 为链复形, 叫做 C 和 D 的**张量积复形**.

34.2　命题　如果 $f:C\to C'$ 和 $g:D\to D'$ 为链映射, 那么

$$f\otimes g:\ C\otimes D\to C'\otimes D'$$

$$c\otimes d\mapsto fc\otimes gd$$

为链映射

证明　直接验算即知.　◁

对于自由链复形 C, 我们有短正合列

$$0\to Z_n\ \underset{k_n}{\overset{i_n}{\rightleftarrows}}\ C_n\ \underset{r_n}{\overset{\partial_n}{\rightleftarrows}}\ B_{n-1}\to 0,$$

1) $(-1)^c$ 表示 $(-1)^{\deg c}$.

其中 Z_n, B_{n-1} 分别为闭链群和边缘链群. 又同态 r_n, k_n 分别使 $k_n i_n = 1, \partial_n r_n = 1$. 又有正合列

$$0 \to B_n \xrightarrow{j_n} Z_n \xrightarrow{\pi_n} H_n(C) \to 0.$$

命

$$\mathcal{B} = \{B_{n-1}, 0\} \quad \mathcal{Z} = \{Z_n, 0\}, \quad \mathcal{H} = \{H_n(C), 0\}.$$

它们都是链复形. 命

$$\Phi_n = \pi_n \circ k_n : C_n \xrightarrow{k_n} Z_n \xrightarrow{\pi_n} H_n(C).$$

那么 $\Phi = \{\Phi_n\} : C \to \mathcal{H}$ 是链映射.

34.3　定理　如果 C 和 D 都是自由链复形, 那么链映射

$$\Phi \otimes 1 : C \otimes D \to \mathcal{H} \otimes D$$

导出同构

$$(\Phi \otimes 1)_* : H_n(C \otimes D) \to H_n(\mathcal{H} \otimes D).$$

证明　按定义, 我们有链复形的短正合列

$$0 \to \mathcal{Z} \underset{k_n}{\overset{i}{\rightleftarrows}} C \xrightarrow{\partial} \mathcal{B} \to 0.$$

现在用 D 做张量积. 由于 D 自由, 故得短正合列

$$0 \to \mathcal{Z} \otimes D \xrightarrow{i \otimes 1} C \otimes D \xrightarrow{\partial \otimes 1} \mathcal{B} \otimes D \to 0.$$

于是有同调群的长正合列

$$\cdots \to H_n(\mathcal{Z} \otimes D) \xrightarrow{(i \otimes 1)_*} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{(\partial \otimes 1)_*} H_n(\mathcal{B} \otimes D)$$

$$\xrightarrow{\triangle} H_{n-1}(\mathcal{Z} \otimes D) \to \cdots.$$

另一方面，命 $\mathcal{B}' = \{B_n, 0\}$, 则从短正合列

$$0 \to \mathcal{B}' \xrightarrow{j} \mathcal{Z} \xrightarrow{\pi} \mathcal{H} \to 0$$

出发，也得到一个链复形的短正合列

$$0 \to \mathcal{B}' \otimes D \xrightarrow{j \otimes 1} \mathcal{Z} \otimes D \xrightarrow{\pi \otimes 1} \mathcal{H} \otimes D \to 0.$$

因此也有一个长正合列. 注意 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 的第 n 个链群分别为 B_{n-1} 和 B_n, 因此 $H_n(\mathcal{B} \otimes D) = H_{n-1}(\mathcal{B}' \otimes D)$. 这样，在图

$$\begin{array}{ccccc}
H_{n+1}(\mathcal{B} \otimes D) & \xrightarrow{\triangle} & H_n(\mathcal{Z} \otimes D) & \xrightarrow{(i\otimes 1)_*} & H_n(C \otimes D) \\
\downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow (\Phi \otimes 1)_* \\
H_n(\mathcal{B}' \otimes D) & \xrightarrow{(j\otimes 1)_*} & H_n(\mathcal{Z} \otimes D) & \xrightarrow{(\pi\otimes 1)_*} & H_n(\mathcal{H} \otimes D)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\xrightarrow{(\partial\otimes 1)_*} & H_n(\mathcal{B} \otimes D) & \xrightarrow{\triangle} & H_{n-1}(\mathcal{Z} \otimes D) \\
& \downarrow = & & \downarrow = \\
\xrightarrow{\triangle'} & H_{n-1}(\mathcal{B}' \otimes D) & \xrightarrow{(j\otimes 1)_*} & H_{n-1}(\mathcal{Z} \otimes D)
\end{array}$$

中，第一和第四个方块可交换. 利用 $k_n i_n = 1$, 知道第二个也可交换. 另外，第三个方块差一符号可交换 (为什么？). 于是 $(\Phi \otimes 1)_*$ 为同构.

34.4　推论　(Künneth 公式) 如果 C, D 均为自由链复形，那么就有短正合列

$$\begin{aligned}
0 \to \sum_{j+i=n} & H_i(C) \otimes H_j(D) \to H_n(C \otimes D) \\
& \to \sum_{i+j=n-1} \operatorname{Tor}(H_i(C), H_j(D)) \to 0,
\end{aligned}$$

它分裂但不自然.

证明　已知 $(\Phi \otimes 1)_* : H_n(C \otimes D) \cong H_n(\mathcal{H} \otimes D)$. 但 $\mathcal{H} \otimes D = \{(H_*(C) \otimes D_*)_n, \partial_\otimes\}$. 注意，这时 $\partial_\otimes = \pm(1 \otimes \partial^D)$. 因此固定 i 以后， $H_i(C) \otimes D$ 为 $\mathcal{H} \otimes D$ 的子复形，而且

$$H_n(\mathcal{H} \otimes D) = \sum_i H_n(H_i(C) \otimes D).$$

现在，先固定 i，对 $H_i(C)\otimes D$ 用 (29.6)，得分裂的短正合列

$$0\to H_i(C)\otimes H_{n-i}(D)\to H_n(H_i(C)\otimes D)$$
$$\to \mathrm{Tor}(H_i(C),H_{n-i-1}(D))\to 0.$$

然后对 i 相加，得分裂的短正合列

$$0\to \sum_i H_i(C)\otimes H_{n-i}(D)\to H_n(C\otimes D)$$
$$\to \sum_i \mathrm{Tor}(H_i(C),H_{n-i-1}(D))\to 0.$$

34.5 推论 对空间 X 和 Y，我们有分裂的短正合列

$$0\to \sum_{i+j=n} H_i(X)\otimes H_j(Y)\to H_n(S_*(X)\otimes S_*(Y))$$
$$\to \sum_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}(H_i(X),H_j(Y))\to 0. \qquad \triangleleft$$

至此，为了得到 $H_n(X\times Y)$，还得比较 $S_*(X\times Y)$ 和 $S_*(X)\otimes S_*(Y)$.

34.6 例 对范畴 Top × Top，命 $\mathcal{M}=\{\Delta_p\times\Delta_q|p,q\geq 0\}$，那么

$$S_*\otimes S_*:\mathrm{Top}\times\mathrm{Top}\to\mathrm{Comp}$$

对 $\mathcal{M}$ 自由而且正维零调.

实际上，正维零调是显然的，而对 $\mathcal{M}$ 自由，只要注意集 $\{\iota_p\otimes\iota_q\}_{p+q=n}$ 使 $(S_*(X)\otimes S_*(Y))_n=\sum\limits_{p+q=n}S_p(X)\otimes S_q(Y)$ 的基 $\{\sigma_p\times\tau_g\}_{p+g=n}=\{(S_*(\sigma_p)\otimes S_*(\tau_g))(\iota_p\otimes\iota_q)\}_{p+q=n}$，其中 $\iota_r:\Delta_r\to\Delta_r$ 为恒同映射.

34.7 例 函子

$$S_*:\mathrm{Top}\times\mathrm{Top}\to\mathrm{Comp}$$

也对 $\mathcal{M}$ 自由和正维零调.

这时正维零调也显然. 至于对 $\mathcal{M}$ 自由, 只要取 $\{m_\beta\}$ 为 $\{d_{\triangle_n}|\in S_n(\triangle_n\times\triangle_n)\}$ 即可. 实际上 $S_n(X\times Y)$ 由 $\sigma:\triangle_n\to X\times Y$ 生成. 但以 $p_1:X\times Y\to X, p_2:X\times Y\to Y$ 表投射, 那么图

$$\begin{array}{ccc}\triangle_n & \xrightarrow{\sigma} & X\times Y\\ d_{\triangle_n}\searrow & & \nearrow g=(p_1\sigma,p_2\sigma)\\ & \triangle_n\times\triangle_n & \end{array}$$

可换. 于是 $S_n(X\times Y)$ 由 $\sigma=g\circ d_{\triangle_n}=S_n(g)(d_{\triangle_n})$ 生成, 这里 $d_{\triangle_n}:\triangle_n\to\triangle_n\times\triangle_n$ 为对角映射 $(d(x)=(x,x))$.

34.8 定理 (Eilenberg-Zilber) 设 X,Y 为连通的空间, 那么链复形 $S_*(X\times Y)$ 和 $S_*(X)\otimes S_*(Y)$ 是链等价的, 即有链映射

$$\varphi:S_*(X\times Y)\to S_*(X)\otimes S_*(Y)$$

和

$$\varphi':S_*(X)\otimes S_*(Y)\to S_*(X\times Y)$$

使 $\varphi\varphi'\simeq 1,\varphi'\varphi\simeq 1$.

证明 因为 X,Y 连通, 故 $X\times Y$ 也连通. 于是有同构

$$\Phi:H_0(X\times Y)\to H_0(X)\otimes H_0(Y).$$

注意 $H_0(X\times Y)=H_0(S_*(X\times Y)), H_0(X)\otimes H_0(Y)=H_0\ (S_*(X)\otimes S_*\ (Y))$ (34.4), 而由 (34.6) 和 (34.7), S_* 和 $S_*\otimes S_*$ 对 $\mathcal{M}$ 均既自由又正维零调. 因此由 (20.5), 知有 φ 如上. 对 Φ^{-1} 有 φ'. 于是 $\varphi\,\varphi'$ 对应于 $\Phi\,\Phi^{-1}=1$. 仍由 (20.5), $\varphi\,\varphi'=1$. 同理 $\varphi'\varphi\simeq 1$. ◁

34.9 定理 对空间 X 和 Y, 存在同构

$$\varphi_*:H_n(X\times Y)\to H_n(S_*(X)\otimes S_*(Y)).$$

证明 不妨设 X 和 Y 均连通. 于是由 (34.8) 得证. ◁

34.10 推论 对于空间 X 和 Y, 有短正合列

$$0 \to \sum_{i+j=n} H_i(X) \otimes H_j(Y) \xrightarrow{\mu} H_n(X \times Y) \to \sum_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}(H_i(X), H_j(Y)) \to 0,$$

这列分裂但不自然.

证明 将 (34.9) 代入 (34.5) 即得. 注意, 这时 μ 为合成

$$H_i(X) \otimes H_j(Y) \to H_{i+j}(S_*(X) \otimes S_*(Y)) \xrightarrow{\varphi'_*} H_{i+j}(S_*(X \times Y)).$$

◁

¡ 请考虑 $\mathrm{Tor}(H_i(X), H_{n-1-i}(Y))$ 为什么会对 $H_n(X \times Y)$ 产生影响. 试与万有系数定理 (31.8) 后的 ¡ 比较.

定理 (34.8) 可推广到相对的情形, 即有

34.11 命题 对空间偶 (X, A) 和 (Y, B), 当 $(X \times B \cup A \times Y; X \times B, A \times Y)$ 可切除时, 存在着链等价

$$\varphi : S_*((X, A) \times (Y, B)) = S_*(X \times Y, X \times B \cup A \times Y) \to S_*(X, A) \otimes S_*(Y, B).$$

34.12 推论 对空间偶 (X, A) 和 (Y, B), 如果 (34.11) 的假定成立, 那么有短正合列

$$0 \to \sum_{i+j=n} H_i(X, A) \otimes H_j(Y, B) \xrightarrow{\mu} H_n((X, A) \times (Y, B)) \to \sum_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}(H_i(X, A), H_j(Y, B)) \to 0,$$

它分裂但不自然. ◁

¡ 以上的讨论是就 $\mathbb{Z}$ 模进行的，不难将它们推广到 R 模的情形，（有时得设 R 为主理想域）. 特别是零调模方法 (20.5)，只要将范畴 Comp 修改为环 R 上的链复形范畴即可. 细节请读者补出.

又 R 为域时， $H_i(X,R)$ 为向量空间，因此挠积为 0. 这样

$$H_n(X\times Y,R)\cong\sum_{i+j=n}H_i(X,R)\otimes H_j(Y,R).$$

现在转向上同调的情形.

设 G_1,G_2 为群.

首先，给定 $\alpha\in S^p(X;G_1)$ 和 $\beta\in S^q(Y;G_2)$，有

$$\alpha\otimes\beta:\quad S_*(X)\otimes S_*(Y)\to G_1\otimes G_2$$

$$c\otimes d\mapsto\begin{cases}\alpha(c)\otimes\beta(d), & c\in S_p(X),d\in S_q(Y)\\ 0, & \text{其它情况}.\end{cases}$$

于是有合成

$$\times:S_{p+q}(X\times Y)\xrightarrow{\varphi}S_*(X)\otimes S_*(Y)\xrightarrow{\alpha\otimes\beta}G_1\otimes G_2,$$

这里 φ 为 (34.8) 中的链等价映射. 这样就有

$$S^p(X;G)\times S^q(Y;G_2)\to S^{p+q}(X\times Y,G_1\otimes G_2).$$

显然它对每个变元为线性的. 故有

$$\times:S^p(X;G_1)\otimes S^q(Y;G_2)\to S^{r+q}(X\times Y,G_1\otimes G_2).$$

34.13　命题　对于上述 $\times$ 积，有

$$\delta(\alpha\times\beta)=(\delta\alpha)\times\beta+(-1)^{\alpha}\alpha\times(\delta\beta).$$

证明　注意 φ 为链映射，故由可换图

$$\begin{array}{ccccc} S_{p+q+1}(X\times Y) & \xrightarrow{\varphi} & S_*(X)\otimes S_*(Y) & & \\ \downarrow\partial & & \downarrow\partial_\otimes & & \\ S_{p+q}(X\times Y) & \xrightarrow{\varphi} & S_*(X)\otimes S_*(Y) & \xrightarrow{\alpha\otimes\beta} & G_1\otimes G_2 \end{array}$$

得

$$\delta(\alpha\times\beta)=(\alpha\otimes\beta)\circ\varphi\circ\partial=(\alpha\otimes\beta)\circ\partial_\otimes\circ\varphi.$$

又

$$(\delta\alpha)\times\beta=(\delta\alpha\otimes\beta)\circ\varphi,$$

$$\alpha\times(\delta\beta)=(\alpha\otimes\delta\beta)\circ\varphi.$$

因此只要对 $\mathrm{Im}(\varphi:S_{p+q+1}(X\times Y)\to S_*(X)\otimes S_*(Y))$ 的元验证就可以了.

任取 $S_*(X)\otimes S_*(Y)$ 母元 $x\otimes y$, 那么 $(\alpha\otimes\beta)\circ\partial_\otimes$ 在 $x\otimes y$ 上为 0, 除非

1) $x\in S_{p+1}(X)$ 而且 $y\in S_q(Y)$,

2) $x\in S_p(X)$ 而且 $y\in S_{q+1}(Y)$.

在情形 1),

$$\begin{aligned}(\alpha\otimes\beta)\circ\partial_\otimes(x\otimes y) &= (\alpha\otimes\beta)(\partial x\otimes y)=\alpha(\partial x)\otimes\beta y\\ &= (\delta\alpha)x\otimes\beta y=(\delta\alpha\otimes\beta)(x\otimes y).\end{aligned}$$

在情形 2),

$$\begin{aligned}&(\alpha\otimes\beta)\circ\partial_\otimes(x\otimes y)\\ &=(\alpha\otimes\beta)((-1)^x x\otimes\partial y)\\ &=(-1)^x\alpha x\otimes\beta(\partial y)\\ &=(-1)^x(\alpha\otimes\delta\beta)(x\otimes y).\end{aligned}$$

又留意，在其它情形，$(\delta\alpha)\otimes\beta$ 和 $\alpha\otimes(\delta\beta)$ 也都为 0. 因此命题得证. ◁

34.14 推论 上述 $\times$ 积导出

$$\times:\quad H^p(X;G_1)\otimes H^q(Y;G_2)\to H^{p+q}(X\times Y,G_1\otimes G_2)$$

$$[\alpha]\otimes[\beta]\mapsto[\alpha\times\beta].$$

证明 这时只要验证 $\delta(\alpha\times\beta)=0$ 和 $[\alpha\times\beta]$ 与 $[\alpha]$ 的代表及 $[\beta]$ 的代表选取无关. 但这些由 (34.13) 立知. ◁

34.15 命题 如果 $f:X\to X', g:Y\to Y'$ 为映射，那么图

$$\begin{array}{ccc}
H^p(X';G_1)\otimes H^q(Y';G_2) & \xrightarrow{\times} & H^{p+q}(X'\times Y';G_1\otimes G_2)\\
\downarrow f^*\otimes g^* & & \downarrow (f\times g)^*\\
H^p(X;G_1)\otimes H^q(Y;G_2) & \xrightarrow{\times} & H^{p+q}(X\times Y;G_1\otimes G_2)
\end{array}$$

可换.

证明 注意 φ 和 $\otimes$ 决定 $\times$, 而 φ 和 $\otimes$ 都是自然的，因此 $\times$ 也自然. ◁

34.16 定义 分次群 (模) 由一组群 (模)$\{G_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ 构成. G_q 的元称为 q 次齐次元. 分次群 G 和 G' 间的同态 α 叫做是 k 次的，如果对所有的 q, 有

$$\alpha: G_q\to G'_{q+k}.$$

分次群 G 叫做是有限型的，如果每个 G_q 为有限生成的.

34.17 定理 (上同调的 Künneth 公式) 如果 G_1 和 G_2 为群，使 $\mathrm{Tor}(G_1,G_2)=0$. 又 $H_*(X), H_*(Y)$ 为有限型的，那么存在短正合列

$$\begin{aligned}
0\to\sum_{i+j=n} & H^i(X;G_1)\otimes H^j(Y;G_2)\\
&\xrightarrow{\times} H^n(X\times Y;G_1\otimes G_2)\\
&\to\sum_{i+j=n-1}\mathrm{Tor}(H^i(X;G_1),H^j(Y;G_2))\to 0,
\end{aligned}$$

它分裂但不自然.

这个定理的证明就不详细写出了.

以上有关上同调的讨论, 也可从 $\mathbb{Z}$ 模推广到 R 模.

§35. 杯积和帽积

在上面的讨论中, 如果 G_1 和 G_2 都是具有单位的可结合交换环 R 时, 利用 R 的乘积 $\mu: R\otimes R\to R$, 得

$$H^p(X;R)\otimes H^q(Y;R)\xrightarrow{\times}H^{p+q}(X\times Y;R\otimes R)$$
$$\xrightarrow{\mu^*}H^{p+q}(X\times Y;R).$$

以后将这个合成仍记为 $\times$.

35.1 引理 对空间 X 和 Y, 命

$$T:\ X\times Y\to Y\times X,$$
$$(x,y)\mapsto(y,x).$$

那么

$$T^*: H^{p+q}(Y\times X;R)\to H^{p+q}(X\times Y;R)$$

使

$$T^*([\beta]\times[\alpha])=(-1)^{\alpha\beta}[\alpha]\times[\beta],$$

其中 $[\alpha]\in H^p(X;R), [\beta]\in H^q(Y;R)$.

证明 命

$$T':\ S_*(X)\otimes S_*(Y)\to S_*(Y)\otimes S_*(X),$$
$$e_p\otimes c_q\mapsto(-1)^{pq}c_q\otimes e_p.$$

那么 T' 为链映射. 实际上

$$\begin{aligned} T' \circ \partial(e \otimes c) &= T'(\partial e \otimes c + (-1)^p e \otimes \partial c) \\ &= (-1)^{(p-1)q} c \otimes \partial e + (-1)^{p+p(q-1)} \partial c \otimes e, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \partial \circ T'(e \otimes c) &= \partial((-1)^{pq} c \otimes e) \\ &= (-1)^{pq}(\partial c \otimes e + (-1)^q c \otimes \partial e) \\ &= (-1)^{pq} \partial c \otimes e + (-1)^{(p+1)q} c \otimes \partial e. \end{aligned}$$

因此 $T' \circ \partial = \partial \circ T'$.

现在考虑下图

$$\begin{array}{ccccc} S_*(X \times Y) & \xrightarrow{\varphi} & S_*(X) \otimes S_*(Y) & & \\ & & & \searrow (-1)^{\alpha\beta} \alpha \otimes \beta & \\ \downarrow T_* & & \downarrow T' & & R \otimes R \xrightarrow{\mu} R \\ & & & \nearrow \beta \otimes \alpha & \\ S_*(Y \times X) & \xrightarrow{\varphi} & S_*(Y) \otimes S_*(X) & & \end{array}$$

由于 R 可换, 故 $(-1)^{\alpha\beta} \mu \circ (\alpha \otimes \beta) = \mu \circ (\beta \otimes \alpha) \circ T'$. 又由 φ, T_* 和 T' 都是链映射, 知 $\varphi \circ T_*$ 和 $T' \circ \varphi$ 也是链映射. 直接验证可知它们在 0 维同调群上导出同一个同态, 因此由 (20.5), 它们自然地链同伦. 因此由

$$\mu \circ (\beta \otimes \alpha) \circ \varphi \circ T_*, \quad (-1)^{\alpha\beta} \mu \circ (\alpha \otimes \beta) \circ \varphi$$

所决定的象属于同一个同调类, 即

$$T^*([\beta] \times [\alpha]) = (-1)^{\alpha\beta} [\alpha] \times [\beta]. \qquad \lhd$$

35.2 引理 积 $\times$ 是自然的, 结合的.

证明 直接验证即可. ◁

对空间 X, 命 $d: X \to X \times X$ 表对角映射, 那么

$$d^*: H^n(X \times X; R) \to H^n(X; R).$$

35.3 定义 上同调类 $[\alpha] \in H^p(X;R)$ 和 $[\beta] \in H^q(X;R)$ 的杯积

$$[\alpha] \cup [\beta] = d^*([\alpha] \times [\beta]).$$

35.4 定义 环 R 上的分次代数 A 是由一个 **分次 R 模** $A = \{A_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ 和一个称为乘法的 R 同态

$$m: A \otimes A \to A$$

组成. 乘法称为是结合的, 如果图

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes m} & A \otimes \\ \downarrow m \otimes 1 & & \downarrow m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

可换. 乘法 m 称为是可换的, 如果图

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{T} & A \otimes A \\ m \searrow & & \swarrow m \\ & A & \end{array}$$

可换, 其中 $T(a \otimes a') = (-1)^{aa'}(a' \otimes a)$.

有时也将 $m(a \otimes a')$ 记为 aa'.

环 R 本身决定如下的一个 R 分次代数: $R_0 = R, R_q = 0, q \neq 0$. 这个分次代数仍记为 R. 代数同态 $\varepsilon: A \to R$ 称为增广. 当 $\varepsilon: A_0 \to R$ 为同构时, 称 A 连通.

¡ 我们没有要求 A 有单位元.

35.5 定理 在明显的意义下, $H^*(X;R)$ 是分次 R 模. 在杯积下, $H^*(X;R)$ 是一个结合的分次 R 代数 (以后简称为环), 且可交换. 又 $f: X \to Y$ 导出代数同态 $f^*: H^*(Y;R) \to H^*(X;R)$.

证明 在 $\times$ 积中，取 $Y=P$(由一点构成的空间)，那么 $H^*(Y;R)=H^0(P;R)\cong R$, 故得

$$H^*(X;R)\otimes R\to H^*(X;R).$$

即 $H^*(X;R)$ 为 R 模. 其他性质由 $\times$ 和相应性质即得. $\triangleleft$

¡ 1) 做为环的 $H^*(X;R)$ 没有"万有系数定理", 即它不能由环 $H^*(X;\mathbb{Z})$ 和 R 决定.

2) 对于杯积和 $\times$ 积，其间有如下的关系；

(1) 如果 $u_i\in H^{p_i}(X;R), v_i\in H^{q_i}(Y;R), i=1,2$, 则

$$(u_1\times v_1)\cup(u_2\times v_2)=(-1)^{v_1u_2}(u_1\cup u_2)\times(v_1\cup v_2)$$

在 $H^{p_1+p_2+q_1+q_2}(X\times Y;R)$ 中成立.

(2) 如果 $u\in H^p(X;R), v\in H^q(Y;R)$, 又 $p_1:X\times Y\to X$ 和 $p_2:X\times Y\to Y$ 为投射，则

$$u\times v=p_1^*(u)\cup p_2^*(v).$$

3) 杯积也可推广到相对的情形. 例如有

$$\cup:H^p(X,A)\otimes H^q(X,B)\to H^{p+q}(X,A\cup B).$$

(注意, 这时对角映射 $d:(X,A\cup B)\to(X\times X,A\times X\cup X\times B)$).

在定义杯积时，链映射

$$S_*(X)\xrightarrow{d_*}S_*(X\times X)\xrightarrow{\varphi}S_*(X)\otimes S_*(X)$$

起关键作用. 但由 (20.5)(零调模方法), 如果链映射

$$\tau:S_*(X)\to S_*(X)\otimes S_*(X)$$

适合条件

1) $\tau(a)=a\otimes a$, 这里 $a:\triangle_0\to X$ 任意,

2) τ 是自然的，

那么这种 τ 称为对角逼近映射，它和 $\varphi\circ d_*$ 链同伦，因此也可用来定义杯积. 特别可用下述的 Alexander-Whitney 对角逼近映射.

对 $0\leq i\leq n$, 命

$$\lambda_i:\ \triangle_i\to\triangle_n$$

$$e_i^k\mapsto e_n^k,\quad k=0,\cdots,i.$$

$(e_n^k=(\underbrace{0,\cdots,0}_{(k-1)个},1,0,\cdots,0)$ 参见 (16.1))

$$\mu_i:\ \triangle_i\to\triangle_n$$

$$e_i^k\mapsto e_n^{n-i+k},\quad k=0,\cdots,i.$$

对 $S_n(X)$ 的母元 $\sigma:\triangle_n\to X$, 命

$${}_i\sigma=\sigma\circ\lambda_i:\triangle_i\to X,$$

$$\sigma_i=\sigma\circ\mu_i:\triangle_i\to X.$$

那么 Alexander-Whitney 映射为

$$AW:\ S_*(X)\to S_*(X)\otimes S_*(X)$$

$$\sigma\mapsto\sum_{i+j=n}{}_i\sigma\otimes\sigma_j.$$

可以验证 AW 为链映射，而且适合上述条件 1) 和 2). 因此可用来代替 $\varphi\circ d_*$ 定义杯积. 由于它构造具体，实际上可计算，因此很为有用.

利用 AW, 杯积的定义为: 给定 $\alpha \in S^p(X;R)$ 和 $\beta \in S^q(X;R)$, 那么

$$\alpha \cup \beta: \quad S_{p+q}(X) \xrightarrow{AW} S_*(X) \otimes S_*(X) \xrightarrow{\alpha\otimes\beta} R \otimes R \xrightarrow{\mu} R$$

$$\sigma \mapsto \sum_{i+j=p+q} {}_i\sigma \otimes \sigma_j \mapsto \alpha({}_p\sigma) \otimes \beta(\sigma_q)$$
$$\mapsto \alpha({}_p\sigma) \cdot \beta(\sigma_q).$$

也就是说

$$\langle \alpha \cup \beta, \sigma \rangle = \langle \alpha, {}_p\sigma \rangle \langle \beta, \sigma_q \rangle. \tag{1}$$

¡ 利用上式很容易知道

$$\alpha \cup \beta = (-1)^{\alpha\beta} \beta \cup \alpha$$

并不成立. 那么是否选取异于 AW 的 τ 做为 $\cup$ 积的定义, 就有可能使上式成立呢? 这就是著名的上链问题. 答案依赖于 R. 例如当 $R=\mathbb{Z}$ 时, 不可能; 当 $R=Q$ 时可能.

至此, 我们就可以直接使用 (1) 来定义和计算杯积. 这样做有许多方便. 例如

35.6 命题

$$\delta(\alpha \cup \beta) = \delta\alpha \cup \beta + (-1)^{\alpha}(\alpha \cup \delta\beta),$$

$$f^{\#}(\alpha \cup \beta) = f^{\#}(\alpha) \cup f^{\#}(\beta).$$

(这里 $f^{\#}$ 是由映射 $f: X \to Y$ 导出的上链映射.) 就可直接用 (1) 予以证实. (前者是杯积可对类定义的根据, 后者导出 f^* 为代数同态.)

35.7 例 我们来计算环面 $T = S^1 \times S^1$ 的上同调环 $H^*(S^1 \times S^1)$.

已知

$$H_k(S^1) = \begin{cases} 0, & k \neq 0,1, \\ \mathbb{Z}, & k = 0,1. \end{cases}$$

故由 (34.10),

$$H_k(S^1\times S^1)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & k=0,2,\\ \mathbb{Z}+\mathbb{Z}, & k=1,\\ 0, & k\neq 0,1,2.\end{cases}$$

它们的母元可依次由点 (0 维),$\overline{\alpha},\overline{\beta}$(一维) 和 $\sigma-\tau:\triangle_2\to T$(二维) 代表. 其中 $\sigma:\triangle_2\to T$ 和 $\tau:\triangle_2\to T$ 为

$$\sigma(0)=a_0,\quad \sigma(1)=a_1,\quad \sigma(2)=a_2,$$

$$\tau(0)=a_0,\quad \tau(1)=a_2,\quad \tau(2)=a_3.$$

$\overline{\alpha},\overline{\beta}:\triangle_1\to T$ 按标出方向映入.

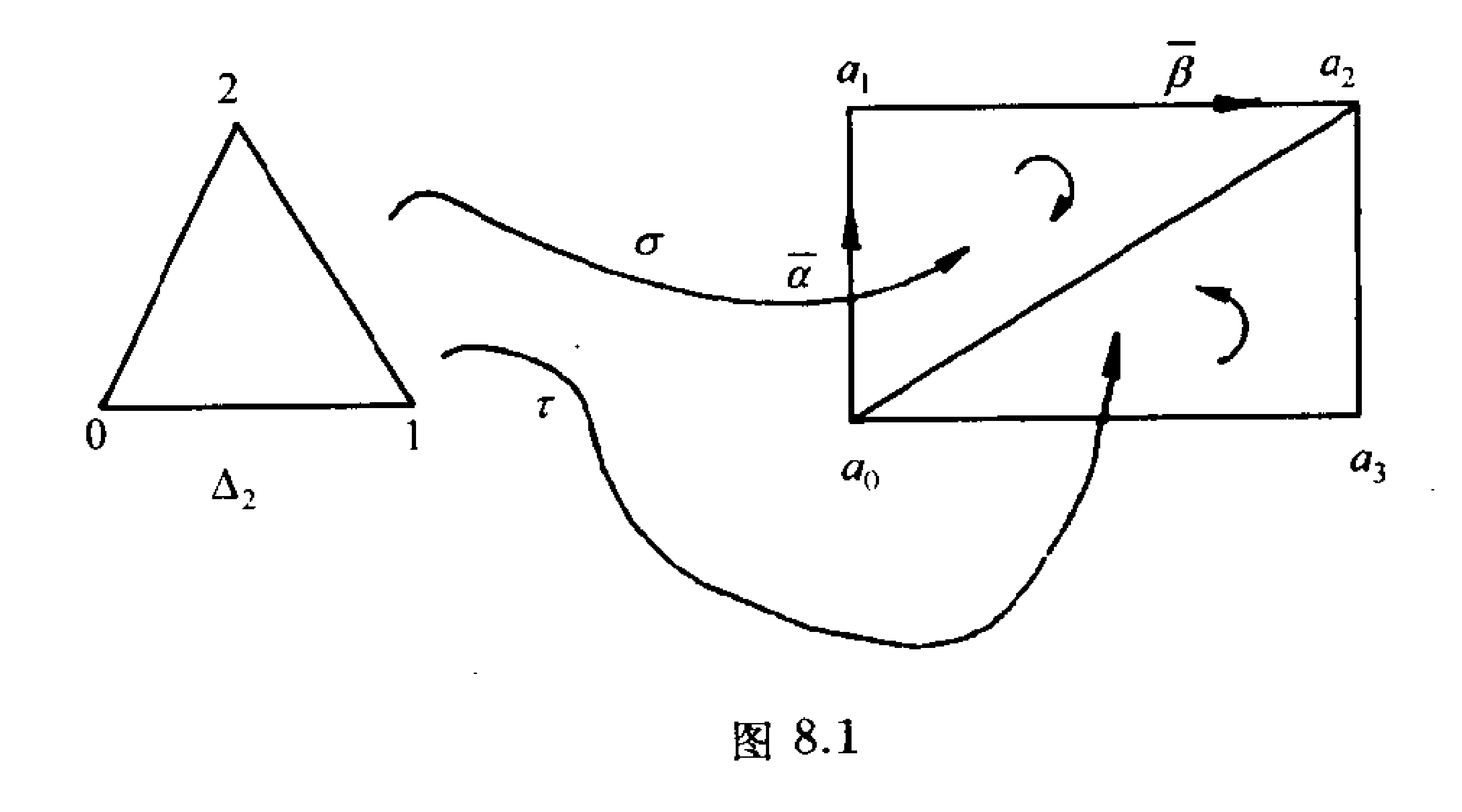


图 8.1

又由 (33.4)

$$H^1(S^1\times S^1;\mathbb{Z})=\mathrm{Hom}(H_1(S^1\times S^1),\mathbb{Z})$$

由 $\overline{\alpha}$ 和 $\overline{\beta}$ 的对偶 α,β 生成, 即

$$\alpha(\overline{\alpha})=1,\quad \alpha(\overline{\beta})=0,$$

$$\beta(\overline{\alpha})=0,\quad \beta(\overline{\beta})=1.$$

于是

$$\begin{aligned}\langle\alpha\cup\beta,\sigma-\tau\rangle &= \langle\alpha,{}_1\sigma\rangle\langle\beta,\sigma_1\rangle-\langle\alpha,{}_1\tau\rangle\langle\beta,\tau_1\rangle\\ &= \langle\alpha,\overline{\alpha}\rangle\langle\beta,\overline{\beta}\rangle-\langle\alpha,\overline{\beta}\rangle\langle\beta,\overline{\alpha}\rangle\\ &= 1-0=1.\end{aligned}$$

同样计算可知

$$\langle\alpha\cup\alpha,\sigma-\tau\rangle=\langle\beta\cup\beta,\sigma-\tau\rangle=0.$$

所以由 $H^2(S^1\times S^1;\mathbb{Z})=\mathrm{Hom}(H_2(S^1\times S^1),\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$, 知它由 $\alpha\cup\beta$ 生成. 这样 $H^*(S^1\times S^1)$ 的环结构定出，即它由 α 和 β 生成. 其间关系为

$$\alpha^2=0=\beta^2,\quad \alpha\beta=-\beta\alpha.$$

35.8　例　$W=S^1\vee S^1\vee S^2$ 的同调群结构与 $T=S^1\times S^1$ 相同，但环结构平凡 (为什么？) 参见 (35.11), 因此与 T 不同.

¡ 由于 W 和 T 具有相同的胞腔链复形，故上例说明，**胞腔链复形不能用来计算环结构**.

由于胞腔链复形不能用来计算环结构，而连续链复形又太庞大并且如上例所示，计算起来没有什么规律可循. 因此自然希望考察一下. 限于多面体时，杯积是一种什么情况.

限于多面体，我们在 (21.3) 中证明

$$\theta_*:H_k(K)\to H_k(S(|K|))$$

为同构，这里 θ 为合成

$$C(K)\xrightarrow{\alpha}C(K_0)\xrightarrow{\gamma}S(|K|).$$

因此

$$\mathrm{Hom}(\theta):S^k(S(|K|),R)\to S^k(C(K),R).$$

注意

$$\alpha : C(K) \to C(K_0)$$

为链等价 ((15.16), 这时， K 的顶点有一个序). 又

$$\gamma : C(K_0) \to S(|K|)$$

为单，而且 $\mathrm{Im}\gamma$ 是 $S(|K|)$ 的一个直和项，因此

$$\mathrm{Hom}(\gamma) : S^k(S(|K|), R) \to S^k(C(K_0), R)$$

为满，从而 $\mathrm{Hom}(\theta)$ 也是满射.

给定 $u \in S^p(C(K), R), v \in S^q(C(K), R)$. 设 u', v' 为它们在 $\mathrm{Hom}(\theta)$ 下的原象. 设 $\sigma^{p+1} = +(a_0 a_1 \cdots a_{p+q})$ 为 $C_{p+q}(K)$ 的基本组的元 (顶点按上述给定的序排列). 以 ${}_p\sigma^{p+q}, \sigma_q^{p+q}$ 分别表 $+(a_0 a_1 \cdots a_p)$ 和 $+(a_p a_{p+1} \cdots a_{p+q})$, 那么

$$\begin{aligned}
&\langle u \cup v, \sigma^{p+q} \rangle \\
&= \langle \mathrm{Hom}(\theta)u' \cup \mathrm{Hom}(\theta)v', \sigma^{p+q} \rangle \\
&= \langle \mathrm{Hom}(\theta)(u' \cup v'), \sigma^{p+q} \rangle \qquad (\mathrm{Hom}(\theta) \text{ 保持 } \cup \text{ 积}) \\
&= \langle u' \cup v', \theta(\sigma^{p+q}) \rangle \\
&= \langle u' \cup v', \gamma \circ \alpha(\sigma^{p+q}) \rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle u' \cup v', \gamma\langle a_0 a_1 \cdots a_{p+q}\rangle\rangle$$

$$= \langle u' \cup v', (a_0 a_1 \cdots a_{p+q})\rangle$$

$$= \langle u', (a_0 a_1 \cdots a_p)\rangle\langle v', (a_p a_{p+1} \cdots a_{p+q})\rangle$$

$$= \langle u', \gamma\circ\alpha({}_p\sigma^{p+q})\rangle\langle v', \gamma\circ\alpha(\sigma_q^{p+q})\rangle$$

$$= \langle \mathrm{Hom}(\theta)u', {}_p\sigma^{p+q}\rangle\langle \mathrm{Hom}(\theta)v', \sigma_q^{p+q}\rangle$$

$$= \langle u, {}_p\sigma^{p+q}\rangle\langle v, \sigma_q^{p+q}\rangle.$$

所以为了使 $\mathrm{Hom}(\theta)$ 保持乘积，应在 $S^*(C(K), R)$ 中按上面的方式定义杯积如下：

$$\langle u \cup v, \sigma^{p+q}\rangle = \langle u, {}_p\sigma^{p+q}\rangle\langle v, \sigma_q^{p+q}\rangle. \tag{2}$$

这样我们就有

35.9 命题 给复形 K 的顶点一个序，按 (2) 来定义单纯上链间的杯积. 那么有如下的上边缘公式

$$\delta(u \cup v) = \delta u \cup v + (-1)^p u \cup \delta v.$$

此杯积是双线性的，结合的，z^0 为其单位元 (这里 z^0 在 K 的每个顶点上均取值 1). 又链映射 θ 的对偶 $\mathrm{Hom}(\theta)$ 保持杯积.

证明 按定义 (2) 直接计算即可. ◁

35.10 推论 单纯上链间的杯积诱导

$$\cup : H^p(K; R) \times H^q(K; R) \to H^{p+q}(K; R).$$

它与 K 的顶点的序无关，是双线性的，结合的，$[z^0]$ 为其单位. 又若 $f : K \to L$ 为映射，那么 f^* 保持杯积.

证明 上同调群间的杯积，由上边缘公式即知其存在. 至于它与 K 的顶点的序无关，可由 θ^* 导出环同构，而 θ^* 与序无关而知.

已知对于连续上同调而言，f^* 保持环积 (35.5)，而 θ^* 与 f^* 可以交换 (21.4)，因此 f^* 也保持单纯上同调中的杯积. ◁

对于单纯同调论中的杯积，也可将它推广到相对的情形，即有

$$\cup : H^p(K,A;R) \times H^q(K,B;R) \to H^{p+q}(K,A\cup B;R).$$

35.11 例 计算 $X = S^1 \vee S^1 \vee S^2$ 的上同调环结构.

这时我们利用下图所示的单纯剖分.

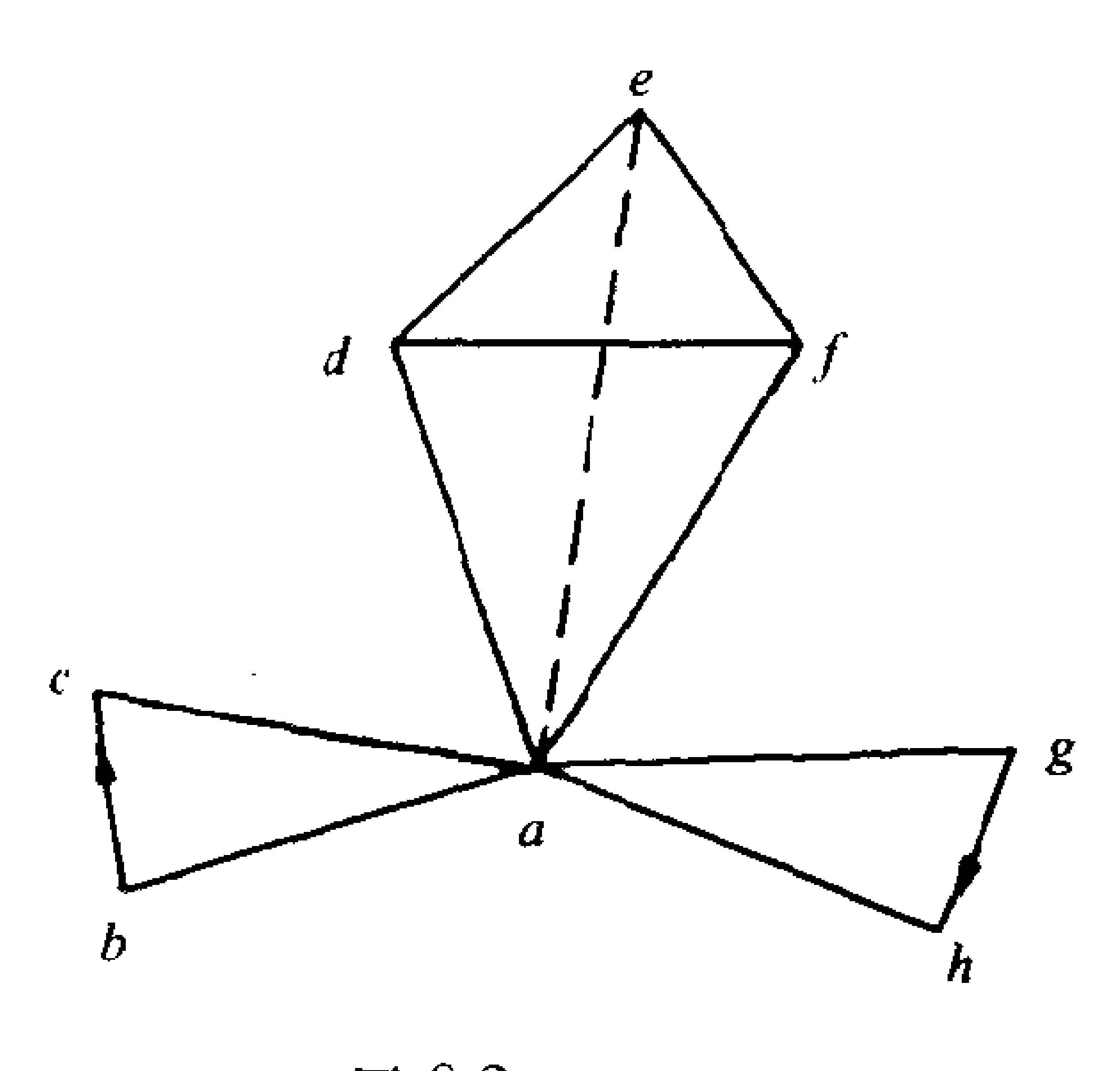


图 8.2

显然

$$H^i(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0, \\ \mathbb{Z}+\mathbb{Z}, & i=1, \\ \mathbb{Z}, & i=2. \end{cases}$$

如果以 α,β 表链 (bc) 和 (gh)，那么它们的对偶 $\overline{\alpha},\overline{\beta}$ 就是上闭链，它们的上同调类就是 $H^1(X)$ 的一组基. 现在给 X 的顶点以字母顺序，我们来计算 $\overline{\alpha}\cup\overline{\beta}$.

由于这时 2 维单形为 $(ade),(adf),(aef)$. 因此 $\overline{\alpha}\cup\overline{\beta}$ 在它们上面均取值为 0. 所以 $\overline{\alpha}\cup\overline{\beta}=0$. 也就是说 $H^*(X)$ 的环结构为平凡的.

利用单纯同调可以对多面体的上同调环进行计算. 但由于单纯剖分很大，因此能否有一种像胞腔链复形那样，既比单纯复形

简单，又能用于环结构的计算呢？下面介绍的假复形就可以做到这一点.

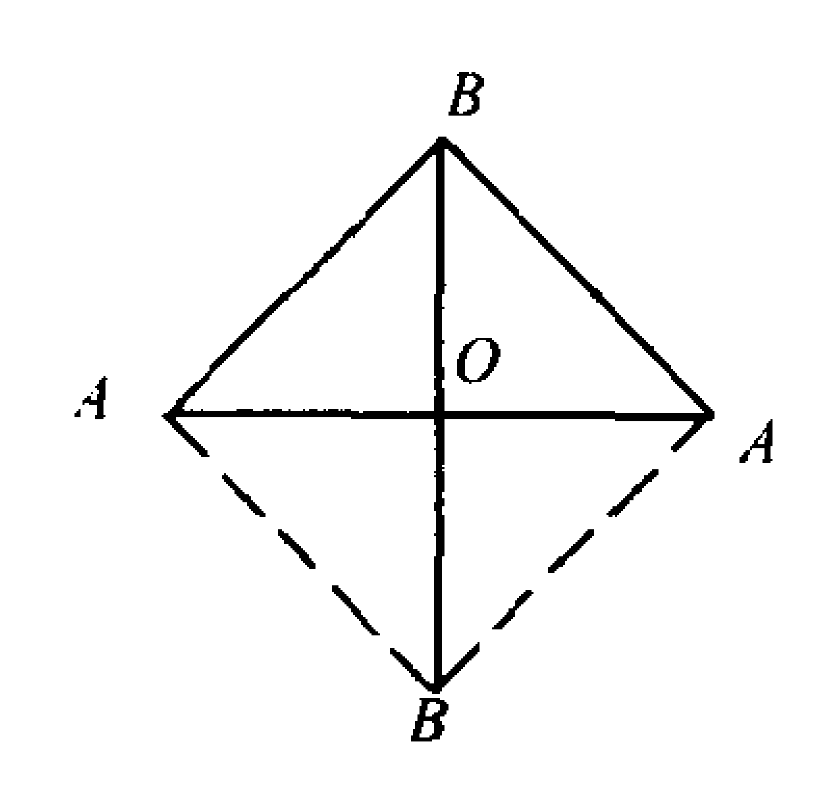
我们知道，单纯复形可视为一组互不相交的闭单形，经叠合而成. 这时允许的叠合仅为那些由彼此的面之间的线性同胚导出. 当然，这些叠合要服从协调性条件，即若 A 的面 A' 和 B 的面 B' 叠合，那么 A' 和 B' 的面也应适当的叠合起来.

35.12 定义 假复形是由一组互不相交的闭单形在它们的边界上作一定的叠合而成. 这时允许的叠合为那些由其一的真子复形到另一的子复形上的分块线性的同胚导出，服从显然的协调性条件.

假复形决定的空间叫假多面体.

和单纯复形一样，利用单形的重心，就可以将假复形 K 予以重心重分，记为 SdK. 假复形本身虽不一定是单纯复形，但 SdK 却是. 这也是我们引用假复形的理由. 和单纯复形的情形一样，可以证明假多面体 $|K|=|SdK|$.

下面是投影平面 (左) 和环面的假剖分



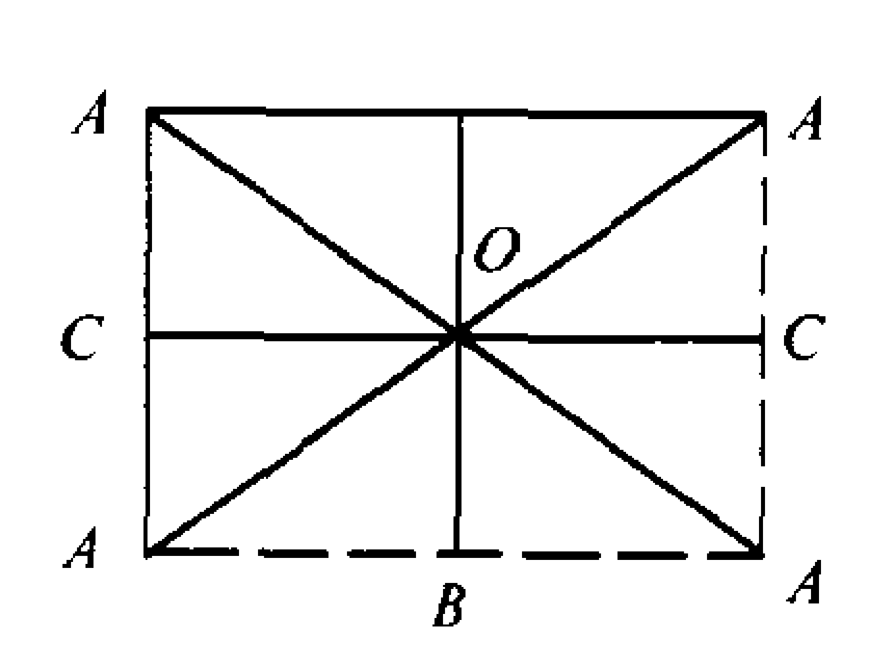


图 8.3

它们分别有 3(4) 个顶点， 6(12) 条棱和 4(8) 个三角形.

对于假复形，虽然顶点不能唯一的决定单形，但每个单形的面却完全由其顶点决定. 因此给单形以定向，便可得基本组. 由基本组可得链群. 在相邻维数的链群之间可以定义边界运算. 从而也可以定义同调群. 所有这些均可像单纯同调那样进行.

同样，我们有重分同态

$$Sd : C(K) \to C(SdK)$$

和标准链同态

$$\pi : C(SdK) \to C(K).$$

而且和单纯同调的情形一样可以证明，它们在同调群上导出互为逆的同构. 于是

$$H_k(|K|) = H_k(|SdK|) = H_k(SdK) = H_k(C(K)),$$

即假复形 K 的同调群就是多面体 $|SdK| = |K|$ 的同调群.

为了便于操作，我们给 K 的顶点以序. 而 SdK 的单形 $\overset{*}{A}_0\overset{*}{A}_1 \cdots \overset{*}{A}_k$ 按 A_i 为 A_{i-1} 的面排序. π 将 SdK 的顶点 $\overset{*}{A}$ 映为 A 的第一个顶点 a. 我们的目的是在假复形 K 的链复形 $C(K)$ 中引进杯积，使 $\pi_* : H^*(K;R) \to H^*(SdK;R)$ 为环同构 (已知它是群同构). 这样当多面体 P 有假剖分 K 时， P 的环结构可通过 $C(K)$ 来予以计算.

设 $u \in \mathrm{Hom}(C_p(K), R), v \in \mathrm{Hom}(C_q(K), R), \sigma = +(a_0a_1 \cdots a_{p+q}) \in C_{p+q}(K)$. 以 ${}_p\sigma$ 表示 $+(a_0a_1 \cdots a_p), \sigma_q$ 表示 $+(a_p a_{p+1} \cdots a_{p+q})$. 定义 $u \cup v \in \mathrm{Hom}(C_{p+q}(K), R)$ 为

$$\langle u \cup v, \sigma_{p+q} \rangle = \langle u, {}_p\sigma \rangle \cdot \langle v, \sigma_q \rangle.$$

那么由 (4), 直接计算可知

$$\delta(u \cup v) = \delta u \cup v + (-1)^p u \cup \delta v,$$

于是 $\cup$ 积可以过渡到假复形的上同调去.

再来证明

$$\mathrm{Hom}(\pi) : \mathrm{Hom}(C(K), R) \to \mathrm{Hom}(C(SdK), R)$$

保持 ∪ 积. 实际上

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{Hom}(\pi)(u \cup v), (\overset{*}{A}_0 \overset{*}{A}_1 \cdots \overset{*}{A}_{p+q})\rangle \\
&= \langle \mathrm{Hom}(\pi)(u \cup v), \overset{*}{\sigma}\rangle \qquad (\overset{*}{\sigma} = (\overset{*}{A}_0 \cdots \overset{*}{A}_{p+q})) \\
&= \langle u \cup v, \pi\, \overset{*}{\sigma}\rangle \\
&= \langle u, {}_p(\pi\, \overset{*}{\sigma})\rangle \langle v, (\pi\, \overset{*}{\sigma})_q\rangle \\
&= \langle u, \pi({}_p\, \overset{*}{\sigma})\rangle \langle v, \pi(\overset{*}{\sigma}_q)\rangle \\
&= \langle \mathrm{Hom}(\pi)u, {}_p\, \overset{*}{\sigma}\rangle \langle \mathrm{Hom}(\pi)v, \overset{*}{\sigma}_q\rangle \\
&= \langle \mathrm{Hom}(\pi)u \cup \mathrm{Hom}(\pi)v, \overset{*}{\sigma}\rangle.
\end{aligned}$$

这样

$$\pi^* : H^*(C(K); R) \to H^*(C(SdK); R)$$

为保持 ∪ 积的同构. 于是, 我们就可以利用多面体 P 的假剖分 K 来计算 P 的上同调环.

35.13 例 计算投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 的上同调环 $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2)$.

由于 $\mathbb{R}P^n = S^n/\sim$, 我们先给 S^n 一个剖分.

这次, 我们给 S^n 以另一形式, 即

$$S^n = \left\{ (x_1, \cdots, x_{n+1}) \middle| \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} |x_i| = 1 \right\}.$$

它的顶点为 $e_+^1, e_-^1, \cdots, e_+^{n+1}, e_-^{n+1}$, 这里

$$\begin{aligned}
e_+^i &= (\underbrace{0, \cdots, 0}_{(i-1)}, 1, 0, \cdots, 0), \\
e_-^i &= (\underbrace{0, \cdots, 0}_{(i-1)}, -1, 0, \cdots, 0), \qquad i = 1, \cdots, n+1.
\end{aligned}$$

命 $L^{(0)} = \{e_+^1, e_-^1\}, L^{(k)}$ 是 $L^{(k-1)}$ 上以 e_+^{k+1}, e_-^{k+1} 为顶点的双角锥. 于是 $L^{(n)}$ 就是 S^n 的一个单纯剖分. 在 $L^{(n)}$ 中, 规定一个序如下: $e_\pm^r < e_\pm^s$ 如果 $r < s$. 于是 $L^{(n)}$ 的单形

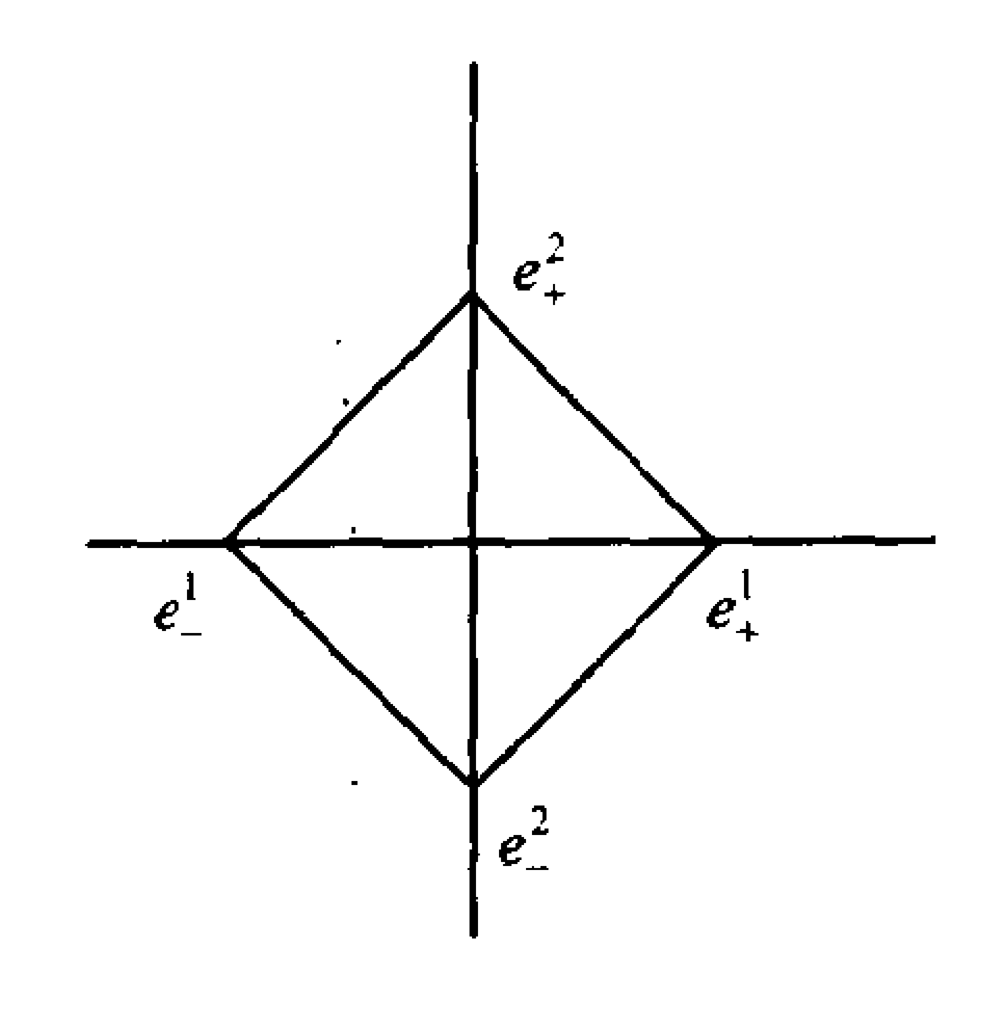


图 8.4

为 $e^{i_0}_{\varepsilon_0}e^{i_1}_{\varepsilon_1}\cdots e^{i_k}_{\varepsilon_k}, 1\le i_0<i_1<\cdots<i_k\le n+1, \varepsilon_i=\pm$. 反之亦真. 而"对径点"的叠合, 就使我们得到 $\mathbb{R}P^n$ 的一个假剖分 P^n, P^n 的单形为 $e^{i_0}_{\varepsilon_0}e^{i_1}_{\varepsilon_1}\cdots e^{i_k}_{\varepsilon_k}(=e^{i_0}_{-\varepsilon_0}e^{i_1}_{-\varepsilon_1}\cdots e^{i_k}_{-\varepsilon_k})$, 这里 $\varepsilon_i=\pm$, 而 $-\varepsilon_i=\mp, 1\le i_0<i_1<\cdots<i_k\le n+1$.

现在利用假剖分 P^n 来计算 $\mathbb{R}P^n$ 的上同调环.

由 (33.4) 知

$$H^k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2[\xi^k],\quad 0\le k\le n.$$

这里 ξ^k 为母元.

我们说, ξ^k 可由下式定义的上链 c^k 代表, $k\le n$.

$$\langle c^k, e^{i_0}_{\varepsilon_0}e^{i_1}_{\varepsilon_1}\cdots e^{i_k}_{\varepsilon_k}\rangle=\begin{cases}1, & \varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k \text{ 为正负交错},\\ 0, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

为了证明这一点, 先注意

$$c^k\cup c^l=c^{k+l},\qquad k+l\le n. \tag{3}$$

又直接验算可知

$$\delta c^k=(1+(-1)^{k+1})c^{k+1}.$$

因此对 $\mathbb{Z}/2$ 系数, c^k 为闭. 下面再证明它们都不是上边缘.

命

$$\alpha_k=\sum_{\varepsilon}\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k e^1_{\varepsilon_1}e^2_{\varepsilon_2}\cdots e^k_{\varepsilon_k}e^{k+1}_+,$$

这里和号对所有可能的 $\varepsilon_i=\pm$ 取. 直接计算可知

$$\partial\alpha_k=(-1)^k(1+(-1)^k)\alpha_{k-1}.$$

又

$$\langle c^k,\alpha_k\rangle=(-1)^{[\frac{1}{2}(k+1)]}, \tag{4}$$

这里 $[q]$ 表示 $\leq q$ 的最大整数.

现在假定 $c^k=\delta d^{k-1}$. 那么

$$\begin{aligned}\langle c^k,\alpha_k\rangle&=\langle\delta d^{k-1},\alpha_k\rangle=\langle d^{k-1},\partial\alpha_k\rangle\\&=(-1)^k(1+(-1)^k)\langle d^{k-1},\alpha_{k-1}\rangle.\end{aligned}$$

也就是说 $\langle c^k,\alpha_k\rangle$ 为偶数. 与 (4) 矛盾. 所以由 c_k 决定的类 $\xi^k\neq 0$. 而 (3) 表明

$$\xi^k\cup\xi^l=\xi^{k+l}.$$

这样我们就有 $\mathbb{R}P^n$ 的 $\mathbb{Z}/2$ 系数的上同调环为

$$H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2[\xi]/\xi^{n+1},$$

这里 $\xi(=\xi^1)\in H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2)$.

利用映射 $f:S^{2n-1}\to S^n$, 我们有贴附空间 $S^n\smile_f e^{2n}$. 当 $n>1$ 时,

$$H^k(S^n\smile_f e^{2n})=\begin{cases}0, & k\neq 0,n,2n,\\ \mathbb{Z}, & k=0,n,2n.\end{cases}$$

以 S^n 表示 $H^n(S^n\smile_f e^{2n})$ 的母元, e^{2n} 表示 $2n$ 维母元, 则

$$S^n\cup S^n=H(f)e^{2n}.$$

35.14　定义　上述整数 $H(f)$ 称为 $f: S^{2n-1} \to S^n$ 的 Hopf 不变量.

35.15　命题　当 n 为奇数时， $f: S^{2n-1} \to S^n$ 的 Hopf 不变量恒为 0.

证明　因为 n 是奇数，故在 $S^n \cup S^n$ 中交换次序，得

$$H(f)e^{2n} = -H(f)e^{2n}.$$

这样 $H(f) = 0$.

于是剩下的问题是，当 n 为偶数时， $H(f)$ 为何？特别，对何种 n, 存在 f 使 $H(f) = 1$. 这就是著名的 Hopf **不变量** 问题. 最终由 J. F. Adams 解决. 答案为： $n = 2, 4, 8$ 是有 Hopf 不变量为 1 的充要条件.

下面我们来定义帽积.

显然 $\alpha \in S^p(X; R)$ 可拓广为

$$\alpha : S_*(X) \to R.$$

于是有

$$S_*(X) \xrightarrow{AW} S_*(X) \otimes S_*(X) \xrightarrow{\alpha\otimes 1} R \otimes S_*(X)$$

和

$$\begin{aligned} R \otimes S_*(X) &\xrightarrow{1\otimes AW} R \otimes S_*(X) \otimes S_*(X) \\ &\xrightarrow{1\otimes\alpha\otimes 1} R \otimes R \otimes S_*(X) \xrightarrow{\mu\otimes 1} R \otimes S_*(X). \end{aligned}$$

现在对 $c \in S_n(X; R) = R \otimes S_n(X)$, 定义帽积

$$\begin{aligned} \cap :\quad & S^p(X; R) \otimes S_n(X; R) \to S_{n-p}(X; R) \\ & (\alpha, c) \mapsto (\mu \otimes 1)(1 \otimes \alpha \otimes 1)(1 \otimes AW)(c). \end{aligned} \qquad (5)$$

特别当 c 为连续 n 单形 σ 时，有

$$(\alpha, \sigma) \mapsto \alpha({}_p\sigma) \otimes \sigma_{n-p}.$$

如果把 $R\otimes S_*(X)$ 看做是由连续 n 单形 σ 生成的自由 R 模，那么

$$\alpha\cap\sigma=\alpha({}_p\sigma)\cdot\sigma_{n-p}.$$

另一方面，对 $\alpha\in S^p(X;R),\beta\in S^q(X;R)$ 和母元 $\sigma\in S_{p+q}(X;R)$, 那么

$$\langle\beta\cup\alpha,\sigma\rangle=\beta({}_q\sigma)\cdot\alpha(\sigma_p).$$

又

$$\langle\alpha,\beta\cap\sigma\rangle=\langle\alpha,\beta({}_q\sigma)\cdot\sigma_p\rangle=\beta({}_q\sigma)\alpha(\sigma_p).$$

所以对任意的 $c\in S_{p+q}(X;R)$, 有

$$\langle\beta\cup\alpha,c\rangle=\langle\alpha,\beta\cap c\rangle.$$

利用 $\delta(\alpha\cup\beta)=\delta\alpha\cup\beta+(-1)^\alpha\alpha\cup\delta\beta$ (35.6), 可得

$$(-1)^\alpha\partial(\alpha\cap c)=(\alpha\cap\partial c)-(\delta\alpha\cap c).\tag{6}$$

于是有

35.16　命题　式 (5) 导出

$$\begin{aligned}\cap:\quad &H^p(X;R)\otimes H_n(X;R)\to H_{n-p}(X;R),\\ &[\alpha]\otimes[z]\mapsto[\alpha\cap z].\end{aligned}$$

证明　由 (6) 可知 $[\alpha\cap z]$ 和 $[\alpha],[z]$ 中的代表选取无关，而且 $\partial(\alpha\cap z)=0$. ◁

帽积也可推广到相对情形，例如有

$$\begin{aligned}&H^p(X,A)\otimes H_n(X,A)\xrightarrow{\cap}H_{n-p}(X,A),\\ &H^p(X)\otimes H_n(X,A)\xrightarrow{\cap}H_{n-p}(X,A).\end{aligned}$$

从杯积的定义，我们知道对角映射

$$d:X\to X\times X$$

起着很大的作用. 因为

$$d^*: H^n(X \times X; R) \to H^n(X; R)$$

将 × 积送回到 $H^n(X; R)$, 从而完成了

$$\cup: H^p(X; R) \otimes H^q(X; R) \to H^{p+q}(X; R).$$

对于同调群而言, 我们虽然也有 (参见 (34.10))

$$\mu: H_p(X) \otimes H_q(X) \to H_{p+q}(X \times X),$$

但却没有一个方向合适的同态, 将 $H_{p+q}(X \times X)$ 映入 $H_{p+q}(X)$, 因此两个同调类就无法相乘.

对于存在有映射

$$m: X \times X \to X$$

的空间, 我们可以利用 m 导出的

$$m_*: H_n(X \times X) \to H_n(X),$$

而使 $H_*(X)$ 存在乘法.

35.17 定义 空间 X 叫做 H 空间, 如果存在映射

$$m: X \times X \to X$$

使

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{(c,1)} & X \times X & \xleftarrow{(1,c)} & X \\ & id \searrow & \downarrow m & \swarrow id & \\ & & X & & \end{array}$$

同伦可换, 即 $m \circ (c,1) \simeq id \simeq m \circ (1,c)$, 这里 $c: X \to X$ 为常值映射.

m 叫做同伦结合的，如果图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{m} & X\times X \\ m\downarrow & & \downarrow 1\times m \\ X\times X & \xrightarrow{m\times 1} & X\times X\times X \end{array}$$

同伦可换. m 叫做同伦可换的，如果图

$$\begin{array}{ccc} X\times X & \xrightarrow{T} & X\times X \\ m\searrow & & \swarrow m \\ & X & \end{array}$$

同伦可换，这里

$$T: X\times X\to X\times X,$$
$$(x,x')\mapsto(x',x).$$

映射 $\nu: X\to X$ 叫做同伦逆，如果图

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{(\nu,1)} & X\times X & \xleftarrow{(1,\nu)} & X \\ & c\searrow & \downarrow m & \swarrow c & \\ & & X & & \end{array}$$

同伦可换.

35.18　例　拓扑群为 H 空间. 实际上，这时乘法为同伦结合，同伦可换，并有同伦逆.

35.19　命题　若 X 为 H 空间，对应

$$H_p(X)\otimes H_q(X)\xrightarrow{\mu}H_{p+q}(X\times X)\xrightarrow{m_*}H_{p+q}(X) \qquad (7)$$

为同态，它使 $\{H_n(X)\}$ 成为一个分次代数.

证明　由于 μ 和 m_* 都是同态. 故它们的合成也是.

分次代数的条件显然成立.　◁

35.20 定义 若 A 和 B 为分次 R 代数，那么张量积 $A \otimes B$ 也还是一个分次 R 代数，这时乘法

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{a'b}(aa' \otimes bb').$$

35.21 例 若 M 为 R 模，张量代数 $\Gamma(M)$ 是如下的一个分次 R 代数：

$$\Gamma(M)_0 = R, \quad \Gamma(M)_k = M^k = \underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_{k}.$$

乘法为同构

$$M^k \otimes M^l \cong M^{k+l}.$$

显然 $\Gamma(M)$ 可结合，但不一定可换.

由于对角映射

$$d : X \to X \times X$$

对一般的空间存在. 所以当 X 是 H 空间时，它也存在. 而且 d 导出

$$d_* : H_n(X; R) \to H_n(X \times X; R).$$

当 R 为域 F 时，

$$\mu : \sum_{p+q=n} H_p(X; F) \otimes H_q(X; F) \to H_n(X \times X; F)$$

为同构 ((34.12) 后的 i). 于是分次代数 $\{H_n(X; F)\}$ 中还有

$$H_n(X; F) \xrightarrow{d_*} H_n(X \times X; F) \to (H_*(X; F) \otimes H_*(X; F))_n. \tag{8}$$

我们将这一结构总结为

35.22 定义 环 R 上的一个分次余代数 A 是由一个分次 R 模 $A = \{A^q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ 和一个称为余乘法 (也称对角映射) 的 R 同态

$$d : A \to A \otimes A$$

组成. 余乘法称为结合的, 如果图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & A\otimes A \\ \downarrow d & & \downarrow d\otimes 1 \\ A\otimes A & \xrightarrow{1\otimes d} & A\otimes A\otimes A \end{array}$$

可换. 余乘法称为可换的, 如果图

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ d\swarrow & & \searrow d \\ A\otimes A & \xrightarrow{T} & A\otimes A \end{array}$$

可换. 其中 T 如前, 即, $T(a,a')=(-1)^{aa'}(a',a)$.

同态 $\varepsilon: A\to R$ 1) 称为余代数 A 的余单位, 如果图

$$\begin{array}{ccc} A & \cong & R\otimes A \\ \| & & \uparrow \varepsilon\otimes 1 \\ A & \xrightarrow{d} & A\otimes A \\ \| & & \downarrow 1\otimes\varepsilon \\ A & \cong & A\otimes R \end{array}$$

可换.

35.23 定义 环 R 上的一个分次代数 A 叫做 R 上的一个 Hopf 代数, 如果 A 还是一个余代数, 而且它的余乘法

$$d: A\to A\otimes A$$

是分次 R 代数间的一个同态.

Hopf 代数 A 叫做连通的, 如果做为 R 分次代数 A 连通, 而且这时增广 $\varepsilon: A\to R$ 为余单位.

35.24 定理 如果 X 是 H 空间, F 是域, 那么 $\{H_n(X,F)\}$ 是 F 上的一个连通 Hopf 代数. 它的乘法由 (7) 决定, 余乘法由 (8) 决定, 增广为 $H_0(X;F)\to F$.

---

1) 这里 R 如前, 视为如下的分次 R 模: 0 次处是 R, 其他处均为 0.

同样，H 空间 X 的上同调模 $\{H^n(X;F)\}$ 也是一个 Hopf 代数，它的乘法为

$$\sum_{i+j=n} H^i(X;F)\otimes H^j(X;F) \xrightarrow{\times} H^n(X\times X;F) \xrightarrow{d^*} H^n(X;F),$$

其中 $\times$ 为 (34.17) 的同构．余乘法为

$$H^n(X;F) \xrightarrow{m^*} H^n(X\times X;F) \xleftarrow{\times} \sum_{i+j=n} H^i(X;F)\otimes H^j(X;F).$$

增广为 $\varepsilon : H^0(X;F) \to F$.

第九章　上同调运算

在上一章里面，我们已经在上同调类之间建立了杯积．从而使空间的上同调模构成一个分次代数．现在进一步介绍这个分次代数还有别的运算可在它上面作用．

§36. Steenrod 运算

为了引用方便，我们将一般形式的零调模方法定理复述如下：

定理　(零调模方法)　设 K 为有模 $\mathcal{M}$ 的范畴，Comp_R 为环 R 上的链复形范畴．$F, G: K \to \mathrm{Comp}_R$ 是两个非负函子 (即 $F_n = G_n = 0, n < 0$)．如果 F 对 $\mathcal{M}$ 为 R 自由，G 对 $\mathcal{M}$ 正维零调，那么每个自然变换 $\Phi: H_0(F) \to H_0(G)$ 均可由自然链映射 $\psi: F \to G$ 导出．而且任意两个这样的 ψ 自然地链同伦．

我们已经知道，在杯积的定义中，对角逼近映射 [1)]

$$\tau: S_*(X) \to S_*(X) \otimes S_*(X)$$

起关键作用．但一般而言 $T \circ \tau \neq \tau$，这里 $T(x \otimes y) = (-1)^{xy} y \otimes x$．然而，存在链同伦 $D_1: S_*(X) \to S_*(X) \otimes S_*(X)$ 使

$$\partial D_1 + D_1 \partial = T \circ \tau - \tau$$

成立．同样，一般而言 $T \circ D_1 \neq D_1$，但有 D_2 将它们相连．如此下去．这些可总结为

---

1) 它适合：a) $\tau(a) = a \otimes a$，这里 $a \in S_0(X)$，b) τ 是自然的．

36.1　引理　对空间 X, 存在次数为 j 的自然同态 $D_j : S_*(X) \to S_*(X) \otimes S_*(X), j \geq 0$, 使

i) D_0 为链映射, 它导出对角映射 $H_0(X) \to H_0(X) \otimes H_0(X)$,

ii) $dD_j + (-1)^{j+1} D_j d = D_{j-1} + (-1)^j T D_{j-1}, j > 0$, 这里 d 为 $S_*(X)$ 和 $S_*(X) \otimes S_*(X)$ 中的边缘算子.

若 $\{D_j\}$ 和 $\{D'_j\}$ 均适合上述条件, 那么有次数为 j 的自然同态 $E_j : S_*(X) \to S_*(X) \otimes S_*(X), j \geq 0$, 使

iii) $E_0 = 0$,

iv) $dE_{j+1} + (-1)^j E_{j+1} d = -E_j + (-1)^{j+1} T E_j + D_j - D'_j$, $j \geq 0$.

证明　命 $R = \mathbb{Z}[t]/(t^2 - 1)$. 考虑 Comp_R. 设 W 为如下的 R 自由链复形

$$\cdots \to R \xrightarrow{1+t} R \xrightarrow{1-t} R \to \cdots \xrightarrow{1-t} R \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}.$$

即 W 是自由分次 R 模, 它在每个维数 $k \geq 0$ 有一个母元 $w_k \in W_k$, 它的边缘算子 d 为

$$d(w_k) = (1 + (-1)^k t) w_{k-1}, \quad k \geq 1,$$

而增广 ε 为 $\varepsilon(1) = \varepsilon(t) = 1$.

考虑如下的两个函子 $F, G : \mathrm{Top} \to \mathrm{Comp}_R$,

$$F(X) = W \otimes S_*(X), \qquad (t(w \otimes u) = tw \otimes u),$$

$$G(X) = S_*(X) \otimes S_*(X), \qquad (t(u \otimes u') = T(u \otimes u')).$$

于是 F 在模 $\mathcal{M} = \{\Delta^n, n \geq 0\}$ 上为 R 自由, G 在 $\mathcal{M}$ 上为正维零调 (由 Künneth 公式即知). 于是上述 (零调模方法) 定理保证有链映射 $\psi : F \to G$ 导出对角映射. 命

$$D_j : S_*(X) \to S_*(X) \otimes S_*(X)$$

为

$$D_j(a)=\psi(w_j\otimes a),\quad a\in S_*(X).\tag{1}$$

于是 ψ 为链映射的条件便产生 $\{D_j\}$ 应满足的条件 i) 和 ii). 反之, 有了适合条件 i) 和 ii) 的 $\{D_j\}$, 我们就可以用 (1) 来定义 ψ, 很容易就知道它导出对角映射. 因此 ψ 和 $\{D_j\}$ 一一对应. 这样两组 $\{D_j\}$ 和 $\{D'_j\}$ 对应于 ψ 和 ψ'. 于是仍由 (零调模方法) 定理, 存在连接 ψ 和 ψ' 的链同伦. 这个链同伦就决定 $\{E_j\}$. 它们适合 iii) 和 iv). ◁

利用 D_j, 我们有上链映射

$$D_j^*:\mathrm{Hom}(S_*(X)\otimes S_*(X),\mathbb{Z})\to\mathrm{Hom}(S_*(X),\mathbb{Z}).$$

它的次数为 $-j$ 次.

对 $c\in\mathrm{Hom}(S_m(X),\mathbb{Z}),d\in\mathrm{Hom}(S_n(X),\mathbb{Z})$, 命

$$c\cup_j d=D_j^*(c\otimes d)\in\mathrm{Hom}(S_{m+n-j}(X),\mathbb{Z}).$$

36.2 命题 上链间的 $\cup_j$ 积, 具有以下性质:

1) $\cup_i$ 是自然的: $f^*(c\cup_j d)=f^*c\cup_j f^*d$, 这里 $f:X\to Y$;

2) 对 $c\in S^m(X,\mathbb{Z}),d\in S^n(X,\mathbb{Z})$ 有

$$\begin{aligned}\delta(c\cup_j d)&=(-1)^j\delta c\cup_j d+(-1)^{j+m}c\cup_j\delta d\\&\quad-(-1)^jc\cup_{j-1}d-(-1)^{mn}d\cup_{j-1}c.\end{aligned}$$

3) $(c_1+c_2)\cup_j(d_1+d_2)=c_1\cup_j d_1+c_1\cup_j d_2+c_2\cup_j d_1+c_2\cup_j d_2$.

证明 直接验算即知.

以 2) 为例证明如下:

设 $a\in S_*(X)$, 那么

$$\delta(c\cup_j d)(a)=(c\cup_j d)(\partial a)=D_j^*(c\otimes d)(\partial a)$$

$$=(c\otimes d)(D_j\partial a)$$

$$= (c\otimes d)((-1)^j dD_j a - (-1)^j D_{j-1}a - TD_{j-1}a)$$

$$= (-1)^j\delta(c\otimes d)(D_j a) - (-1)^j(c\otimes d)(D_{j-1}a)$$

$$-(-1)^{mn}(d\otimes c)(D_{j-1}a)$$

$$= ((-1)^j(\delta c\otimes d) + (-1)^{j+m}(c\otimes \delta d))(D_j a)$$

$$-((-1)^j(c\otimes d) + (-1)^{mn}(d\otimes c))(D_{j-1}a)$$

$$= (-1)^j\delta c\cup_j d + (-1)^{j+m}c\cup_j \delta d - (-1)^j c\cup_{j-1} d$$

$$-(-1)^{mn}d\cup_{j-1} c(a).$$

◁

现在利用 $\cup_j$ 积，对 $c\in S^n(X;\mathbb{Z})$，命

$$Sq^j c = \begin{cases} c\cup_{n-j} c, & 0\le j\le n,\\ 0, & j>n.\end{cases}$$

36.3 命题 运算 Sq^i 具有以下性质：

1) Sq^i 自然；

2) 设 $A\subset X$，若在 $S_*(A)$ 上，$c\equiv 0(\mathrm{mod}2)$. 那么在 $S_*(A)$ 上 $Sq^i c\equiv 0(\mathrm{mod}2)$，

3) 若 $\delta c\equiv 0(\mathrm{mod}2)$，那么 $\delta(Sq^i c)\equiv 0(\mathrm{mod}2)$，

4) 若 $c\equiv \delta d(\mathrm{mod}2)$，那么

$$Sq^i c = \delta[d\cup_{n-i} c + d\cup_{n-i-1} d](\mathrm{mod}2),\quad 0\le i\le n,$$

5) 若 c_1, c_2 为 mod2 闭链，那么

$$Sq^i(c_1+c_2) = Sq^i c_1 + Sq^i c_2 + \delta(c_1\cup_{n-i+1} c_2)(\mathrm{mod}2).$$

证明 2) 为 1) 的推论，而 1) 由 Sq^i 的定义即知.

3), 4), 5) 直接验算即知. 现以 3) 为例，计算如下：

$$\begin{aligned}\delta Sq^i c &= \delta(c \cup_{n-i} c)\\ &\equiv \delta c \cup_{n-i} c + c \cup_{n-i} \delta c + 2c \cup_{n-i-1} c\\ &\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2).\end{aligned}$$

◁

利用上述 Sq^i 的性质，我们可以定义自然同态

$$Sq^i : H^n(X, A; \mathbb{Z}/2) \to H^{n+i}(X, A; \mathbb{Z}/2),$$

$$[c]_2 \mapsto [Sq^i c]_2.$$

如此定义的 S_q^i 与 $\{D_j\}$ 的取法无关. 实际上，如果 $S_q^{i'}$ 是由另一个这种序列 $\{D_j'\}$ 定义的，那么由 (36.1), 存在序列 $\{E_j\}$ 使 (36.1) 中的 iii), iv) 成立. 于是对任一上闭链 c 及 $a \in S_*(X)$ 有

$$\begin{aligned}0 \quad &\equiv (c \otimes c)[dE_{n-i+1} + E_{n-i+1}d + E_{n-i}\\ &\quad +TE_{n-i} + D_{n-i} + D'_{n-i}](a)\\ &\equiv (c \otimes c)[E_{n-i+1}d + D_{n-i} + D'_{n-i}](a)\\ &\equiv [Sq^i c + Sq^{i'} c + \delta E^*_{n-i+1}(c \otimes c)](a) \quad (\mathrm{mod} 2).\end{aligned}$$

即 $[Sq^i c]_2 = [Sq^{i'} c]_2$.

这个同态叫做 Steenrod 平方运算.

36.4 命题 同态 Sq^i 具有以下性质：

1) $Sq^0 = 1$,

2) Sq^1 为 Bockstein 边缘算子，即由系数正合序列

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{i} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{j} \mathbb{Z}/2 \to 0$$

所决定的边缘算子，

3) $Sq^n x = x \cup x, x \in H^n(X, A; \mathbb{Z}/2)$,

4) $Sq^k x = 0, k > \dim x$,

5) $\delta^* Sq^i = Sq^i \delta^*$, 这里 $\delta^* : H^{n-1}(A; \mathbb{Z}/2) \to H^n(X, A; \mathbb{Z}/2)$ 为上边缘算子,

6) $Sq^1 Sq^{2j} = Sq^{2j+1}, Sq^1 Sq^{2j+1} = 0, j \geq 0$,

7) (Cartan 公式)

$$Sq^i(xy) = \sum_{i+j=k} (Sq^j x)(Sq^k y).$$

证明 1) (36.1) 中对空间 X 所决定的 $\{D_j\}$ 是自然的. 因此对 $X = \triangle_n$ 它也有一组相应的 $\{D_j\}$. 将 $\triangle_n$ 的有向链复形 $C_*(\triangle_n)$ 看作 $S(\triangle_n)$ 的子复形, 那么可取 $\{D_j\}$ 使

$$D_j(\iota_n) \in C_*(\triangle_n) \otimes C_*(\triangle_n).$$

特别, 当 $j > n$ 时, $D_j(\iota_n) = 0$, 于是由自然性, 知 $j > n$ 时, $D_j(\tau) = 0, \quad \tau \in S_n(X)$.

现在来计算 $D_n(\iota_n)$.

当 $n = 0$ 时, 由 (36.1) 的 i) 知 $D_0(\iota_0) = \iota_0 \otimes \iota_0$.

设 $n < q$ 时, $D_n(\iota_n) = \iota_n \otimes \iota_n$ 成立.

考虑 $D_q(\iota_q)$. 这时 $D_q(\iota_q)$ 或者为 0, 或者为 $\iota_q \otimes \iota_q$. 若 $D_q(\iota_q) = 0$, 那么由 (36.1) 的 ii) 知

$$D_{q-1}(\iota_q) + TD_{q-1}(\iota_q) = 0$$

($D_q(\partial\iota_q) = 0$, 因为 $\partial\iota_q$ 的次数 $< q$).

这样 $D_{q-1}(\iota_q) = \Sigma a_i(\iota_q \otimes \iota_q^{(i)} + \iota_q^{(i)} \otimes \iota_q), a_i = 0$ 或 1. ($\iota_q^{(i)}$ 为 ι_q 的第 i 个面), 但这不可能. 因为由等式 ((36.1) 的 ii))

$$D_{q-2}(\iota_q) + TD_{q-2}(\iota_q) = \partial D_{q-1}(\iota_q) + D_{q-1}(\partial\iota_q)$$

将发现, $\iota_q^{(i)} \otimes \iota_q^{(i)}$ 的系数在左端为 0, 而在右端为奇数 $2a_i + 1$.

所以 $D_q(\iota_q)=\iota_q\otimes\iota_q$. 于是 $D_q(a)=a\otimes a, a\in S_q(X)$.

对于这样选取的 $\{D_j\}$,

$$(Sq^0c)(a)=(c\otimes c)D_0(a)=(c\otimes c)(a\otimes a)=(c(a))^2.$$

但是在 $\mathbb{Z}/2$ 里面, $x^2=x$. 因此

$$Sq^0c=c.$$

2) 和 6) 的证明.

Bockstein 边缘算子

$$\beta: H^{n-1}(X,A;\mathbb{Z}/2)\to H^n(X,A;\mathbb{Z}/2)$$

的定义如下 (参见 (31.4)): 给定 $[c]_2\in H^{n-1}(X,A;\mathbb{Z}/2)$. 以 i,j 表置入映射. $i_\#,j_\#$ 是它们导出的链映射. 取 $d\in S^{n-1}(X,A;\mathbb{Z})$ 使 $j_\#(d)=c$. 于是 $j_\#(\delta d)=\delta j_\#(d)=\delta c=2b\equiv 0(\mathrm{mod}2)$, $b\in S^n(X,A;\mathbb{Z})$. 故有 $c'\in S^n(X,A;\mathbb{Z}/2)$ 使 $i_\#(c')=\delta d$. 这样 $\beta(\{c\})=\{c'\}$.

现在 $S_q^j[c]_2$ 由 $c\cup_{n-1-j}c$ 代表, 而

$$\begin{aligned}&\delta(c\cup_{n-1-j}c)\\&=(-1)^{n-1-j}2b\cup_{n-1-j}c+(-1)^{j-1}c\cup_{n-1-j}2b\\&\quad-(-1)^{n-1-j}c\cup_{n-2-j}c-(-1)^{n-1}c\cup_{n-2-j}c.\end{aligned}$$

因此 $\beta Sq^j[c]_2$ 是由 mod2 上闭链

$$b\cup_{n-1-j}c+c\cup_{n-1-j}b+S(j)c\cup_{n-2-j}c$$

代表, 这里

$$S(j)=\begin{cases}1, & j\text{ 为偶},\\ 0, & j\text{ 为奇}.\end{cases}$$

但 $b\cup_{n-1-j}c+c\cup_{n-1-j}b\equiv\delta(c\cup_{n-j}b)\mathrm{mod}2$, 因此 $\beta Sq^j[c]_2=S(j)Sq^{j+1}[c]_2$.

3) 因为 D_0 导出对角映射，故可用它来定义杯积.

4) 按定义即知.

5) 先回顾 δ^* 的定义，若 $c\in S^{n-1}(A;\mathbb{Z}/2)$ 为上闭链，取 $d\in S^{n-1}(X;\mathbb{Z}/2)$ 使 $i^\# d=c$ （这里 i 为置入映射，$i^\#$ 是它导出的上链映射). 于是 $i^\#(\delta d)=\delta i^\#(d)=\delta c=0$. 因此 δd 可视为 $S^n(X,A;\mathbb{Z}/2)$ 的元. 于是 $\delta^*[c]=[\delta d]$. 这样，按定义，$Sq^i\delta^*[c]$ 由 $\delta d\cup_{n-i}\delta d$ 代表，又 $Sq^i[c]$ 由 $c\cup_{n-1-i}c$ 代表.

命 $d'=d\cup_{n-i}\delta d+d\cup_{n-1-i}d$, 那么

$$i^\# d'=i^\# d\cup_{n-i}i^\#\delta d+i^\# d\cup_{n-1-i}i^\# d=c\cup_{n-1-i}c.$$

而

$$\delta d'=\delta d\cup_{n-i}\delta d\quad(\mathrm{mod}2).$$

因此

$$\delta^* Sq^i[c]=Sq^i\delta^*[c].$$

7) 由于杯积是由 $\times$ 积经 d^* 导出 (参见 (35.3)), 因此只要能证明

$$Sq^i(x\times y)=\sum_{j+k=i}(Sq^j x)\times(Sq^k y)$$

即可.

命

$$r:\ W\to W\otimes W,$$

$$w_i\mapsto\sum_{j+k=i}(-1)^{jk}w_j\otimes t^j w_k.$$

并按 R 线性的要求予以扩充. 于是易知 (φ,φ' 见 (34.8), ψ 见

(36.1) 的证明.)

$$W \otimes S(X \times Y) \xrightarrow{r\otimes\varphi} W \otimes W \otimes S(X) \otimes S(Y)$$

$$\xrightarrow{1\otimes T\otimes 1} W \otimes S(X) \otimes W \otimes S(Y)$$

$$\xrightarrow{\psi_X\otimes\psi_Y} S(X) \otimes S(X) \otimes S(Y) \otimes S(Y)$$

$$\xrightarrow{1\otimes T\otimes 1} S(X) \otimes S(Y) \otimes S(X) \otimes S(Y)$$

$$\xrightarrow{\varphi'\otimes\varphi'} S(X \times Y) \otimes S(X \times Y)$$

导出对角映射, 故可取为 $\psi_{X\times Y}$.

注意 φ, φ' 为同伦逆, 故对上闭链 c 和闭链 a 有 $c(\varphi'\circ\varphi(a)) = c(a)$. 对 $\varphi\circ\varphi'$ 也有类似关系. 于是对上闭链 $c \in S^n(X;\mathbb{Z}/2), d \in S^m(Y;\mathbb{Z}/2)$ 和闭链 $a \in S(X;\mathbb{Z}/2)$, $b \in S(Y;\mathbb{Z}/2)$, 有

$$[Sq^i(c \times d)](a \times b) = [Sq^i\varphi^*(c \otimes d)](\varphi'(a \otimes b))$$

$$= [\varphi^*(c \otimes d) \otimes \varphi^*(c \otimes d)]\psi_{X\times Y}(w_{n+m-i} \otimes \varphi'(a \otimes b))$$

$$= [(c \otimes d) \otimes (c \otimes d)](\varphi \otimes \varphi) \circ (\varphi' \otimes \varphi') \circ (1 \otimes T \otimes 1)$$

$$\circ(\psi_X \otimes \psi_Y) \circ (1 \otimes T \otimes 1) \circ (r \otimes \varphi)$$

$$\circ(w_{n+m-i} \otimes \varphi'(a \otimes b))$$

$$= [c \otimes d \otimes c \otimes d](1 \otimes T \otimes 1) \circ (\psi_X \otimes \psi_Y) \circ (1 \otimes T \otimes 1)$$

$$\cdot \left(\sum_{j+k=n+m-i} w_j \otimes t^j w_k \otimes a \otimes b \right)$$

$$= \sum_{j+k=n+m-i} (c \otimes c \otimes d \otimes d) \circ (\psi_X \otimes \psi_Y)$$

$$\cdot(w_j \otimes a \otimes t^j w_k \otimes b)$$

$$= \sum_{j+k=n+m-i} [(c\otimes c)(\psi_X(w_j\otimes a))]$$
$$\cdot[(d\otimes d)(T^j\psi_Y(w_k\otimes b))]$$
$$= \sum_{j+k=n+m-i} [Sq^{n-j}(c)](a)\cdot[Sq^{m-k}(d)](b)$$
$$= \sum_{r+s=i}(Sq^r c\times Sq^s d)(a\times b).$$

由于 $\mathbb{Z}/2$ 为域， $H_*(X\times Y;\mathbb{Z}/2)$ 中的元均呈 $\sum_i [a_i\times b_i]$ 形状，这里 $[a_i]\in H_*(X;\mathbb{Z}/2)$, $[b_i]\in H_*(Y;\mathbb{Z}/2)$. 因此对所有的 $x\in H^*(X;\mathbb{Z}/2), y\in H^*(Y;\mathbb{Z}/2)$, 有

$$Sq^i(x\times y)=\sum_{j+k=i} Sq^j x\times Sq^k y. \qquad \triangleleft$$

¡ 6) 中的等式是 Sq^i 应满足的 Adem 关系

$$Sq^aSq^b=\sum_{c=0}^{[\frac{a}{2}]}\binom{b-c-1}{a-2c}Sq^{a+b-c}Sq^c,\quad a<2b,$$

的特例 (二项式系数要 mod2). 上述 Adem 关系，我们就不证了.

¡ Adem 关系将 $a<2b$ 时的 Sq^aSq^b 用 $d\geq 2c$ 时的 Sq^dSq^c 表出.

36.5 同态 Sq^i 和同纬同态

$$S:\tilde{H}^q(X)\to\tilde{H}^{q+1}(SX)$$

可换.

证明 同纬同态 S 由下式定义 (C_+X, C_-X 为 X 的两个锥)

$$\begin{array}{ccc}\tilde{H}^q(X) & \longrightarrow & \tilde{H}^{q+1}(SX)\\ \delta^*\downarrow & & \uparrow i^*\\ \tilde{H}^{q+1}(C_+X,X) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}^{q+1}(SX,C_-X).\end{array}$$

由于同构 i^* 由置入映射导出，下面的水平箭头为切除同构，故它们都和 Sq^i 可换. 又 δ^* 由 5) 与 Sq^i 可换. 故 S 与 Sq^i 可换. ◁

Steenrod 运算 Sq^i 为同态，但 Cartan 公式表明它们不是环同态. 但它们可放在一起成为一个环同态如下，命

$$Sq : H^*(X;\mathbb{Z}/2) \to H^*(X;\mathbb{Z}/2),$$

$$u \mapsto \sum_i Sq^i u.$$

¡ 右端的和为有限和. 又 $Sq(u)$ 一般不为齐次的，即它不是某个 $H^n(X;\mathbb{Z}/2)$ 的元，而是环 $H^*(X;\mathbb{Z}/2)$ 的元. 当然，u 也是环 $H^*(X;\mathbb{Z}/2)$ 的元.

36.6　命题　如上定义的 Sq 为环同态.

证明　由于 $Sq^i u$ 对 u 线性，所以余下的是证

$$Sq(u \cup v) = Sq(u) \cup Sq(v).$$

按定义

$$Sq(u \cup v) = \sum_{i \geq 0} Sq^i(u \cup v) = \sum_{i \geq 0}\left(\sum_{j=0}^{i} Sq^j u \cup Sq^{i-j} v\right)$$

$$= \sum_{j,k \geq 0} Sq^j u \cup Sq^k v.$$

而

$$Sq(u) \cup Sq(v) = \left(\sum_{j \geq 0} Sq^j u\right) \cup \left(\sum_{k \geq 0} Sq^k v\right)$$

$$= \sum_{j,k \geq 0} Sq^j u \cup Sq^k v.$$

因此得证. ◁

36.7 推论 若 $u \in H^1(X;\mathbb{Z}/2)$, 那么

$$Sq^i(u^j) = \binom{j}{i} u^{j+i},$$

证明 由性质 1), 3) 和 4), 得

$$Sq(u) = Sq^0 u + Sq^1 u = u + u^2.$$

于是由 Sq 为环同态，得

$$Sq(u^j) = (Sq(u))^j = (u+u^2)^j = u^j \sum_k \binom{j}{k} u^k.$$

比较系数便得所要等式. ◁

36.8 引理 设 $a = \sum_{i=0}^m a_i 2^i, b = \sum_{i=0}^m b_i 2^i$, 为 a, b 的二进展开 $(2 > a_i, b_i \geq 0)$, 那么

$$\binom{a}{b} \equiv \prod_{i=0}^m \binom{a_i}{b_i} \quad (\bmod\ 2).$$

证明 在多项式环 $\mathbb{Z}/2[x]$ 中， $(1+x)^2 = 1+x^2$. 因此 $(1+x)^{2^i} = 1+x^{2^i}$.

$$\begin{aligned}(1+x)^a &= (1+x)^{\Sigma_i a_i 2^i} = \prod_{i=0}^m (1+x)^{a_i 2^i} \\ &= \prod_{i=0}^m (1+x^{2^i})^{a_i} = \prod_{i=0}^m \sum_{s=0}^{a_i} \binom{a_i}{s} x^{s2^i}.\end{aligned}$$

这时 $x^b = x^{\Sigma b_i 2^i}$ 的系数为 $\prod_{i=0}^m \binom{a_i}{b_i}$. 另一方面, 在 $(1+x)^a$ 的二项展式中其系数为 $\binom{a}{b}$, 故得证. ◁

36.9 推论 若 $u \in H^1(X;\mathbb{Z}/2)$, 那么

$$Sq^i(u^{2^k}) = \begin{cases} u^{2^k}, & i = 0, \\ u^{2^{k+1}}, & i = 2^k, \\ 0, & i \neq 0, 2^k. \end{cases}$$

证明 由 (36.7) 和 (36.8) 即知. ◁

为了方便,将 $Sq^{i_1}Sq^{i_2}\cdots Sq^{i_k}$ 记为 Sq^I, 这里 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$. 于是 $Sq^{\{2,1\}}(x)$ 表示 $Sq^2(Sq^1(x))$. 另外, 约定 $Sq^I = Sq^0$, 这里 I 为空集.

36.10 定义 同态 Sq^i 称为是可以分解的, 如果

$$Sq^i = \sum_{t<i} a_t Sq^t,$$

这里 a_t 为一串 Steenrod 运算. 否则称它为不可分解的.

36.11 定理 Sq^i 为不可分解的, 当且仅当 $i = 2^k$.

证明 充分性. 设 $i = 2^k$.

若 Sq^i 可分解, 设 $Sq^i = \sum\limits_{t<i} a_t Sq^t$.

取 $n > 2i = 2^{k+1}$. 那么在 $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2)$ 中, 由 (36.9),

$$Sq^i(\xi^i) = \xi^{2i} \neq 0,$$

这里 $\xi \in H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2)$ 是母元. 另一方面, 仍由 (36.9),

$$Sq^i(\xi^i) = \sum_{t<i} a_t Sq^t(\xi^i) = 0.$$

矛盾!

必要性. 设 $i = a + 2^k, 0 < a < 2^k$. 命 $b = 2^k$. 那么 Adem 关系给出

$$Sq^a Sq^b = \binom{b-1}{a} Sq^{a+b} + \sum_{c>0} \binom{b-1-c}{a-2c} Sq^{a+b-c} Sq^c.$$

因为 $b=2^k$, 故由 (36.8), $\begin{pmatrix} b-1 \\ a \end{pmatrix} \equiv 1(\mathrm{mod}2)$. 这样 $Sq^i = Sq^{a+b}$ 可分解. ◁

做为推论，我们有

36.12 定理 若 $f: S^{2n-1} \to S^n$ 的 Hopf 不变量为 1, 那么 $n = 2^k$.

证明 按定义，参见 (35.14), $H(f)=1$ 表示

$$Sq^n(S^n) = e^{2n} \neq 0.$$

若 $n \neq 2^k$, 那么 Sq^n 可分解. 设 $Sq^n = \sum\limits_{t<n} a_t Sq^t$. 于是

$$Sq^n(S^n) = \sum_{t<n} a_t Sq^t(S^n) = 0,$$

因为 $H^i(S^n \cup_f e^{2n}; \mathbb{Z}/2) = 0, 0 < i < 2n$. 所得矛盾表明 $n = 2^k$. ◁

36.13 定义 序列 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 称为可允许，如果

$$i_j \geq 2i_{j+1}, \quad 当\ j < k\ 时.$$

特别当 $k=1$ 时， I 总是可允许的.

当 I 为可允许时，也称 Sq^I 为可允许的.

$l(I)=k$ 叫做 I 的长度， $d(I) = \sum\limits_j i_j$ 称为 I 的次数. 对可允许的 I, $e(I) = 2i_1 - d(I) = i_1 - i_2 - \cdots - i_k = (i_1 - 2i_2) + (i_2 - 2i_3) + \cdots + i_k$ 称为 I 的超过量. $m(I) = \sum\limits_{j=1}^{k} j i_j$ 叫做 I 的动差.

§37. Steenrod 代数

37.1 定义 **mod2 Steenrod 代数 $\mathcal{A}_2$** 是由 Sq^i 生成的分次结合代数，满足 Adem 关系. 详细说：设 M 为分次 $\mathbb{Z}/2$ 模，这时

$M_i \cong \mathbb{Z}/2$ 由 Sq^i 生成 $(\deg Sq^i = i), i > 0, \mathcal{A}_2$ 为 $\Gamma(M)$ 模下述 Adem 关系

$$Sq^a \otimes Sq^b - \sum_j \binom{b-1-j}{a-2j} Sq^{a+b-j} \otimes Sq^j, \quad a < 2b, \quad (1)$$

的商，这时约定 $Sq^0 = 1$.

显然，$H^*(X;\mathbb{Z}/2)$ 是 $\mathcal{A}_2$ 模.

以下设 $P = \mathbb{R}P^k$, k 视需要取得足够大，以保证出现的上同调类 $\xi^m \neq 0$. 于是由 (35.13), 知

$$H^*(P;\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[\xi]/\xi^{k+1}.$$

命 $\zeta_n = \xi \times \cdots \times \xi \in H^n(P^n;\mathbb{Z}/2)$, 又

$$e : \mathcal{A}_2 \to H^*(P^n;\mathbb{Z}/2),$$

$$Sq^I \mapsto Sq^I(\zeta_n).$$

37.2 命题 e 将次数 $\leq n$ 的可允许单项式变成 $H^*(P^n, \mathbb{Z}/2)$ 中的线性无关元.

证明 对 n 行归纳法.

当 $n = 1$ 时，由 (36.7) 即知.

现在设 $\Sigma a_I Sq^I(\zeta_n) = 0$, 这里和号对次数固定为 $q(\leq n)$ 的可允许单项式 Sq^I 取. 要证的是：对每个 I 有 $a_I = 0$. 现在对长度 $l(I)$ 行下降归纳法. 设 $l(I) > m$ 时 $a_I = 0$. 那么上述关系变为

$$\sum_{l(I)=m} a_I Sq^I(\zeta_n) + \sum_{l(I)<m} a_I Sq^I(\zeta_n) = 0. \quad (2)$$

Künneth 公式告诉我们

$$H^{q+n}(P;\mathbb{Z}/2) = \sum_s H^s(P;\mathbb{Z}/2) \otimes H^{q+n-s}(P;\mathbb{Z}/2),$$

以 π 表示向 $s=2^m$ 的直和项作投射. 由 Cartan 公式

$$Sq^I(\zeta_n)=Sq^I(\xi\times\zeta_{n-1})=\sum_{J\le I}Sq^J\xi\times Sq^{I-J}\zeta_{n-1}. \tag{3}$$

这里 $J\le I$ 表示对所有的 $r,0\le j_r\le i_r$ 成立. 命

$$J_m=(2^{m-1},\cdots,2^1,2^0).$$

那么

$$\pi Sq^I(\zeta_n)=\begin{cases}0, & \text{如果 } l(I)<m\\ \xi^{2^m}\times Sq^{I-J}\zeta_{n-1}, & \text{如果 } l(I)=m.\end{cases} \tag{4}$$

实际上, 首先由 (36.9) 知: $Sq^J\xi=0$, 除非 J 为 $(2^{k-1},2^{k-2},\cdots,2^1,2^0)$ 或者在它里面添些 0. 而当 $J=J_m$ 或者在 J_m 里面添些时 0 时, $Sq^J\xi=\xi^{2^m}$. 不过在 J_m 里面添 0 以后, 它的长度 $>m$.

现在来证明 (4). 将 π 作用于 (3), 当 $l(I)<m$ 时, 由于 $J\le I$, 知 $l(J)<m$, 因此 $\pi Sq^I(\zeta_n)=0$. 若 $l(I)=m$, 那么 $\pi(Sq^J\xi\times Sq^{I-J}\zeta_{n-1})=0$, 除非 $J=J_m\le I$. 故 (4) 成立.

现在将 π 作用于 (2), 并利用 (4), 得

$$\xi^{2^m}\times\sum_{l(I)=m}a_I Sq^{I-J_m}(\zeta_{n-1})=0. \tag{5}$$

注意, 当 I 跑遍所有的次数为 q, 长度为 m 的可允许序列时, $I-J_m$ 跑遍次数为 $q-(2^m-1)$, 长度 $\le m$ 的所有可允许序列. 反之亦真. 由于 $m\ge 1$, 故 $q-2^m+1\le n-1$. 因此由对 n 的归纳假定, 知 (5) 中每个系数均为 0. 即, 对 $l\ (I)=m$ 有 $a_I=0$. ◁

37.3　推论　限于次数 $\le n$, e 为单. ◁

37.4　定理　可允许单项式构成 $\mathcal{A}_2$ 的加法基.

证明　上面已经证明, 可允许的单项式为线性独立的. 因此只要再证每个非可允许的单项式均可用可允许的单项式来表示即可.

设 $I=(i_1,\cdots,i_k)$ 是一个非可允许序列，假定 $n=i_s<2i_{s+1}=2m$. 那么由 Adem 关系

$$Sq^I=Sq^N Sq^n Sq^m Sq^M=\sum_j \lambda_j Sq^N Sq^{n+m-j} Sq^j Sq^M,$$

这里 $\lambda_j\in\mathbb{Z}/2$. 直接计算就可以知道，右端和号中的每一项，其动差均较 Sq^I 的小. 也就是说，每用一次 Adem 关系，其动差减小. 而动差有下界. 因此用有限次 Adem 关系后，序列变为可允许的. 这样，每个非可允许的单项式均可用可允许的单项式来表示. 定理得证. ◁

对于连通的分次 R 代数 A, 命 $\underline{A}=\operatorname{Ker}\varepsilon$. 即 $\underline{A}$ 为 A 的所有次数 >0 的元所构成的理想. 称它为增广理想.

37.5 定义 上述 A 的可分解元集为 $\underline{A}\otimes\underline{A}$ 在乘法 $\varphi: A\otimes A\to A$ 下的象. 这个象为 A 中的双边理想. $Q(A)=\underline{A}/\varphi(\underline{A}\otimes\underline{A})$ 叫做 A 的不可分解元集. 它是一个 R 模，而不是一个代数.

又，$Q(A)$ 的元是陪集而不是 A 的元，故上面的说法有些含混，但用于 $A=\mathcal{A}_2$, 却与 (36.10) 所定义的 Sq^i 可分解一致.

37.6 分次 $\mathbb{Z}/2$ 代数 $\mathcal{A}_2$ 由 $\{Sq^{2^i}\}$ 生成.

证明 由 (36.11) 即知. ◁

¡ $\{Sq^{2^i}\}$ 生成 $\mathcal{A}_2$, 但不是自由生成. 例如 $Sq^1Sq^1=0, Sq^2Sq^2=Sq^1Sq^2Sq^1$.

我们下一个目标是使 mod2 Steenrod 代数 $\mathcal{A}_2$ 变成一个 Hopf 代数. 为此，命

$$\psi:\Gamma(M)\to\Gamma(M)\otimes\Gamma(M)$$

$$Sq^i\mapsto\sum_j Sq^j\otimes Sq^{i-j}$$

并要求它是代数同态. 因此

$$\psi(Sq^r \otimes Sq^s) = \psi(Sq^r) \otimes \psi(Sq^s)$$
$$= \left(\sum_a Sq^r \otimes Sq^{r-a}\right) \otimes \left(\sum_b Sq^s \otimes Sq^{s-b}\right).$$

37.7 定理 上述 ψ 导出代数同态

$$\psi : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2.$$

证明 以 $\pi : \Gamma(M) \to \mathcal{A}_2$ 表自然投射. 那么只要证明 $\operatorname{Ker}\pi \subset \operatorname{Ker}\underline{\psi}$ 即可. 这里

$$\underline{\psi} : \Gamma(M) \to \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2$$

由 $\psi : \Gamma(M) \to \Gamma(M) \otimes \Gamma(M)$ 导出.

根据 Künnoth 公式, 我们有同构 (系数群均为域 $\mathbb{Z}/2$, 故略)

$$\alpha : H^*(X) \otimes H^*(X) \to H^*(X \times X),$$
$$u \otimes v \mapsto u \times v.$$

又取 k 足够大, 命 $P = \mathbb{R}P^k, X = P^n, e : \mathcal{A}_2 \to H^*(X)$ 如前, 它在次数 $\leq n$ 时为单 (36.16). 于是 $e \otimes e : \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2 \to H^*(X) \otimes H^*(X)$ 在次数 $\leq n$ 时也为单.

现在 $H^*(X \times X)$ 为 $\mathcal{A}_2$ 模, 通过 π, 它也是 $\Gamma(M)$ 模. 另一方面 $H^*(X) \otimes H^*(X)$ 是 $\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2$ 模, 通过 $\underline{\psi}$, 它也是 $\Gamma(M)$ 模. 我们说, 这两个 $\Gamma(M)$ 模结构通过同构 α, 它们一致. 实际上, 给定 $u \otimes v \in H^*(X) \otimes H^*(X)$, 它经 $Sq^i \in \Gamma(M)$ 作用以后为

$$\underline{\psi}(Sq^i)(u \otimes v) = \left(\sum_j Sq^j \otimes Sq^{i-j}\right)(u \otimes v) = \sum_j Sq^j u \otimes Sq^{i-j} v.$$

它在 α 之下，对应于 $\sum_j Sq^j u \times Sq^{i-j} v$.

而 $\alpha(u \otimes v) = (u \times v) \in H^*(X \times X)$ 在 $Sq^i \in \Gamma(M)$ 的作用下，按 Cartan 公式为

$$Sq^i(u \times v) = \sum_j Sq^j u \times Sq^{i-j} v.$$

因此两者一致.

有了以上准备，现在就可以证明 Ker $\pi \subset$ Ker $\underline{\psi}$ 了.

设 $m \in \Gamma(M)$ 使 $\pi(m) = 0$. 于是 m 在 $H^*(X \times X)$ 上的作用为零. 相应的，m 在 $H^*(X) \otimes H^*(X)$ 上的作用也为 0. 特别 m 在 $(\zeta_n \otimes \zeta_n)$ 上的作用为 0, 即

$$\underline{\psi}(m)(\zeta_n \otimes \zeta_n) = 0.$$

但按定义 $(e \otimes e)\ \underline{\psi}(m) = \underline{\psi}(m)(\zeta_n \otimes \zeta_n) = 0$. 而这时 $(e \otimes e)$ 为单. 故 $\underline{\psi}(m) = 0$. 所以得证. ◁

37.8 定理 $\mathcal{A}_2$ 是 Hopf 代数. 它的对角映射为 ψ.

证明 按定义，应验证 $\mathcal{A}_2$ 是 $\mathbb{Z}/2$ 上的一个带有增广的分次代数. 但这已知. 所以剩下的是定义对角映射

$$\psi : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}.$$

这个 ψ 就取为 (37.7) 中的 ψ. 那么它是代数同态. 又图

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{A}_2 \otimes \mathbb{Z}/2 & & \\ & 1\otimes\varepsilon \nearrow & & \searrow\cong & \\ \mathcal{A}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2 & & & & \mathcal{A}_2 \\ & \varepsilon\otimes 1 \searrow & & \nearrow\cong & \\ & & \mathbb{Z}/2 \otimes \mathcal{A}_2 & & \end{array}$$

中的合成均为 id, 可直接验证. 实际上，由于各同态都是代数同态，所以只要在 $\mathcal{A}_2$ 的母元上验证即可. 但这显然，又 ψ 为可换及结合的. ◁

37.9　定义　设 A 为 Hopf 代数，$\psi: A \to A \otimes A$ 为其对角映射．若 M 为 A 模，那么 $M \otimes M$ 可以通过 ψ 而为 A 模．若 M 中有乘法 $m: M \otimes M \to M$，当 m 为 A 模同态时，称 M 为 Hopf 代数 A 上的代数．

37.10　定理　若 X 为空间，那么环 $H^*(X;\mathbb{Z}/2)$ 是 Hopf 代数 $\mathcal{A}_2$ 上的代数．

证明　由于 ψ 为代数同态，因此由 Cartan 公式立知 $H^*(X;\mathbb{Z}/2)$ 为 $\mathcal{A}_2$ 上的代数．　◁

37.11　定义　域 F 上的分次模 M 叫做是有限型的，如果对每个 n, M_n 为有限维的．

对有限型的分次模 M，其对偶 M^* 为 $M_n^* = \mathrm{Hom}(M_n, F)$．如果 M, N 都是有限型的，那么有正则同构 $(M \otimes N)^* \cong M^* \otimes N^*$，由 $(f \otimes g)(m \otimes n) = (-1)^{mn} f(m) \otimes g(n)$ 决定．

若 A 为有限型 Hopf 代数，φ 和 ψ 分别为其乘法和对角映射，那么 A^* 也是一个 Hopf 代数，而乘法和对角映射分别为 ψ^* 和 φ^*．

由于 $\mathcal{A}_2$ 的乘法 φ 只结合不可换，所以它的乘法结构比较复杂．可是它的对角映射 ψ 是既可换又结合的．因此它的对偶代数 $\mathcal{A}_2^*$ 的乘法 ψ^* 就是既可换又结合的，只是对角映射 φ^* 只结合不可换．

下面我们来研究 Steenrod 代数 $\mathcal{A}_2$ 的对偶代数的结构．

已知 (37.4) $\mathcal{A}_2$ 的一组 (加法) 基为 Sq^I，这里 I 为可允许序列．当 $I = J_m$ 时 (参见 (37.2) 的证明)，将 Sq^{J_m} 记为 M_m．命 $\mathcal{A}_2^*$ 中 M_m 的对偶为 ξ_m．即

$$\langle \xi_m, Sq^I \rangle = \begin{cases} 1, & I = J_m, \\ 0, & I \neq J_m. \end{cases}$$

由于 Sq^{J_m} 的次数为 $2^m - 1$，故 ξ_m 也为 $2^m - 1$ 次的．

命 $P = \mathbb{R}P^k$ 如前．在 $H^n(P^n)$ 中，有 $x_1 \times \cdots \times x_n$，这里 $x_i = x$ 为 $H^1(P)$ 的生成元．

对非负整数列 $I=(i_1,\cdots,i_n)$, 命 $x(I)=x^{2^{i_1}}\times\cdots\times x^{2^{i_n}}\in H^*(P^n),\xi(I)=\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_n}\in\mathcal{A}_2^*$.

37.12 定理 若 $\alpha\in\mathcal{A}_2$, 那么

$$\alpha(x_1\times\cdots\times x_n)=\sum_{l(I)=n}\langle\xi(I),\alpha\rangle x(I). \tag{6}$$

注意右端的和号只有在 $\xi(I)$ 和 α 有相同次数时才非零. 故为有限和.

证明 对 n 行归纳法. 先看 $n=1$.

若 α 为可允许的, 结论由 (36.9) 而知. 而 $\mathcal{A}_2$ 中的一般元为可允许元的和, 故 $n=1$ 时定理成立.

现在假定定理在 $<n$ 时成立. 考虑 n 的情形.

命

$$\psi\alpha=\sum_i\alpha_i'\otimes\alpha_i''.$$

那么由 (37.10) 及归纳假定, 得

$$\begin{aligned}\alpha(x_1\times\cdots\times x_n)&=\sum_i\alpha_i'x_1\times\alpha_i''(x_2\times\cdots\times x_n)\\&=\sum_{i,I}\langle\xi(i_1),\alpha_i'\rangle\langle\xi(i_2,\cdots,i_n),\alpha_i''\rangle x(I)\\&=\sum_{i,I}\langle\xi(i_1)\otimes\xi(i_2,\cdots,i_n),\alpha_i'\otimes\alpha_i''\rangle x(I)\\&=\sum_{I}\langle\xi(i_1)\otimes\xi(i_2,\cdots,i_n),\psi\alpha\rangle x(I)\\&=\sum_{l(I)=n}\langle\xi(I),\alpha\rangle x(I),\end{aligned}$$

其中最后一个等式由 ψ^* 为 $\mathcal{A}_2^*$ 的乘法即知. 故定理得证. ◁

现在命 $\mathcal{A}'=\mathbb{Z}/2[\eta_1,\eta_2,\cdots]$ 为多项式代数, 其中 η_k 的次数为 2^k-1.

37.13 定理 代数间的同态

$$f : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}_2^*$$

$$\eta_i \mapsto \xi_i$$

为同构.

证明 先证明 f 是满的.

如果 f 不满, 那么有 $\alpha(\neq 0) \in \mathcal{A}_2$, 使 $\langle \xi(I), \alpha \rangle = 0$ 对所有的 I 成立. 但由 (5), 知 $\alpha(x_1 \times \cdots \times x_n) = 0$ 对所有的 n 成立. 根据 (37.3), 得 $\alpha = 0$ 矛盾. 故 f 为满得证.

再来证明 f 为同构. 为此只要证明在每个维数, 做为 $\mathbb{Z}/2$ 上的向量空间, $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}_2^*$ 有相同的秩即可.

当 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_n, 0, \cdots)$ 时, 将 $\eta_1^{i_1} \eta_2^{i_2} \cdots \eta_n^{i_n}$ 记为 η^I. 于是 $\mathcal{A}'$ 中的单项式 η^I 与非负整数列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n, 0, \cdots)$ 一一对应. 而 $\mathcal{A}_2$ 的加法基, 可允许单项式 Sq^J 与整数列 $(j_1, j_2, \cdots, j_n, 0, \cdots)$ 对应, 这里 $j_k \geq 2j_{k+1}, j_n \geq 1$. 因此只要证明: 使 $\deg\eta^I = \deg Sq^J$ 的非负整数列 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_n, 0, \cdots)$ 与可允许序列 J 一一对应就行了.

命

$$I_k = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1,}_{k} 0, \cdots),$$

与

$$J_k = (2^{k-1}, 2^{k-2}, \cdots, 2, 1, 0, \cdots)$$

对应, 并按坐标相加予以线性扩充. 那么当

$$I = (i_1, \cdots, i_n, 0, \cdots)$$

对应于

$$J = (j_1, \cdots, j_n, 0, \cdots),$$

使 $\deg\eta^I = \deg Sq^J$ 时, 得

$$j_k = i_k + 2i_{k+1} + \cdots + 2^{n-k} i_n, \quad k = 1, \cdots, n.$$

据此解 i_k，得

$$i_k = j_k - 2j_{k+1}.$$

因此，每个可允许序列 J 是唯一的一个非负整数序列 I 的象. 这样它们就是一一对应的.

整个定理得证. ◁

以上将 $\mathcal{A}_2^*$ 决定到乘法的地步. 下面考虑它的对角映射 φ^*.

37.14　定理　对偶 Steenrod 代数 $\mathcal{A}_2^*$ 中的对角映射

$$\varphi^* : \mathcal{A}_2^* \to \mathcal{A}_2^* \otimes \mathcal{A}_2^*,$$

$$\xi_k \mapsto \sum_{i=0}^{k} \xi_{k-i}^{2^i} \otimes \xi_i.$$

证明　设 $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_2$. 我们得证明

$$\langle \varphi^* \xi_k, \alpha \otimes \beta \rangle = \left\langle \sum_i \xi_{k-i}^{2^i} \otimes \xi_i, \alpha \otimes \beta \right\rangle.$$

即

$$\langle \xi_k, \alpha\beta \rangle = \sum_i \langle \xi_{k-i}^{2^i}, \alpha \rangle \langle \xi_i, \beta \rangle.$$

设 $x, x_1, \cdots, x_n$ 如前. $d : P \to P^n$ 为对角映射. 当 $n = 2^i$ 时，有

$$x^{2^i} = d^*(x_1 \times \cdots \times x_n).$$

因此

$$\begin{aligned} \alpha(x^{2^i}) &= \alpha \cdot d^*(x_1 \times \cdots \times x_n) \\ &= d^* \alpha(x_1 \times \cdots \times x_n) = d^* \left(\sum_{l(I)=n} \langle \xi(I), \alpha \rangle x(I) \right) \\ &= \sum_{l(I)=n} \langle \xi(I), \alpha \rangle x^{n(I)}, \end{aligned}$$

这里 $n(I)=2^{i_1}+\cdots+2^{i_n}$, 如果 $I=(i_1,\cdots,i_n)$.

现在来计算和号里的值.

首先注意,当循环置换 I 时, $\langle\xi(I),\alpha\rangle x^{n(I)}$ 不变. 由于 $n=2^i$, 故从 I 出发, 经所有可能循环置换作用后, 得到的不同序列为 $2^{j(I)}$ 个. 若 $j(I)>0$, 那么这些项 mod2 消掉. 所以和号中剩下的只是 $j(I)=0$ 的项要计算. 由 $j(I)=0$ 推出 $i_1=i_2=\cdots=i_n=m$. 对这种 $I,\xi(I)=\xi_m^{2^i},n(I)=2^{m+i}$. 于是

$$\alpha(x^{2^i})=\sum_m\langle\xi_m^{2^i},\alpha\rangle x^{2^{m+i}}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\sum_k\langle\xi_k,\alpha\beta\rangle x^{2^k}&=(\alpha\beta)(x)=\alpha(\beta(x))\\&=\alpha\sum_i\langle\xi_i,\beta\rangle x^{2^i}\\&=\sum_{i,m}\langle\xi_m^{2^i},\alpha\rangle\langle\xi_i,\beta\rangle x^{2^{m+i}}.\end{aligned}$$

比较 x^{2^k} 的系数, 得

$$\langle\xi_k,\alpha\beta\rangle=\sum_{m+i=k}\langle\xi_m^{2^i},\alpha\rangle\langle\xi_i,\beta\rangle.$$

$\mathcal{A}_2^*$ 中的 φ^* 就完全决定了下来. ◁

Steenrod 运算

$$Sq^i:H^n(X,A;\mathbb{Z}/2)\to H^{n+i}(X,A;\mathbb{Z}/2)$$

是下述上同调运算的特例.

37.15 定义 设 p,q 为固定的整数, G,G' 为群. $(p,q;G,G')$ 型的上同调运算 θ 是从反函子 $H^p(-;G)$ 到反函子 $H^q(-;G')$ 的一个自然变换. 称 θ 为可加的, 如果

$$\theta(X,A):H^p(X,A;G)\to H^q(X,A;G^1)$$

是同态.

37.16 **例** Steenrod 运算

$$Sq^i : H^n(-;\mathbb{Z}/2) \to H^{n+i}(-;\mathbb{Z}/2)$$

是 $(n, n+i, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ 型上同调运算， $n \in \mathbb{Z}, i \geq 0$.

¡ 设 p 为素数. 当 $G = G' = \mathbb{Z}/p$ 时，也存在有 Steenrod 运算. Steenrod 运算在代数拓扑学中占有极为重要的地位. 至今仍在发挥着基本的作用.